

Գլուխ 5

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑԻ ԳԵՂԱԳԻՏԱԿԱՆ ԳՐԱՎԶՈՒԹՅՈՒՆԸ

Մաթեմատիկան տիրապետում է ոչ միայն ճշմարտությանը, այլև բարձրագույն գեղեցիկին: Հղիված ու խիստ, վեհորեն մաքուր և կատարյալին ձգտող նման գեղեցկությունը հատուկ է միայն արվեստի մեծագույն ստեղծագործություններին:

Բերթրան Ռասսել



Թվաբանությունը և
երկրաչափությունը:

Պյութագորաս և Էվկլիդես: Ռեղեֆ, Ջոտտոյի զանգակատունը, Ֆլորենցիա, 1298-1359, Ջոտտո (1267-1337), Պիզանո (1290-1348), Թալենթի (1300-1369),

§1. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՆԱԽՆԴԻՐՆԵՐԸ ԵՎ ԳԵՂԵՑԻԿԻ ՁԵՎԱՎՈՐՈՒՄԸ

Երաժշտությունը կարող է վեհացնել հոգին, գեղանկարչությունը՝ ուրախացնել աչքը, պոեզրան՝ գրգռել զգացմունքները, փիլիսոփայությունը՝ բավարարել բանականության պահանջները, ճարտարագիտական գործը՝ կատարելագործել կյանքի նյութական կողմը: Իսկ մաթեմատիկան ունակ է հասնել այդ բոլորին:

Մորիս Բլայն

1. Մաթեմատիկայի գիտական և հանրակրթական բնագավառների փոխհարաբերությունը և գեղեցիկի ձևավորման հիմնախնդիրը

Մաթեմատիկական կրթության հիմնախնդիրներից մեկը մաթեմատիկայի գիտական և հանրակրթական բնագավառների փոխհարաբերության պարզաբանման հարցն է. արդյո՞ք վերջինս առաջինի մի՞ թեկուզ և նեղ բաժինը չէ: Հանրության և ուսուցիչների մի ստվար զանգվածի մոտ համոզմունք կա այս հարցադրման դրական պատասխանի վերաբերյալ: Այս վտանգավոր մոտեցումը բերում է նաև մաթեմատիկական կրթության սխալ կազմակերպման, ինչը, ըստ էության, մաթեմատիկական կրթությունը հանգեցնում է ուսուցման միջոցով մաթեմատիկական գիտելիքների և կարողությունների կուտակման:

Մաթեմատիկան աշխարհընկալման, ճանաչողության հատուկ ձև է, բնության և այն ուսումնասիրող գիտությունների համար հետազոտման, օրինաչափությունների ստացման, հաստատման և հավաստման միջոց: Այդ առաքելությունները մաթեմատիկան իրականացնում է իր ճարտարապետական կառույցի միջոցով, որի առանձնահատկություններից մեկն էլ ձևական տրամաբանության հետ կառուցվածքային ձևերի ընդհանրությունն է և մտածողության համահունչ ընթացքը ճշմարտության բացահայտման գործընթացում: Նշված որակները մաթեմատիկան դարձնում են հիմնական թիրախ, որին պետք է միտվել կրթական այնպիսի խնդիրների իրագործման համար, ինչպիսիք են աշխարհընկալումը, աշխարահայացքի ձևավորումը, բնական գիտությունների տարրերի ուսումնասի-

րությունը, տրամաբանական մտածողության ձևավորումն ու զարգացումը: Վերջինս ավելի նշանակալից է դարձնում հանրակրթության մաթեմատիկական բաղադրիչը, քանի որ հանրակրթության մեջ ներառված չէ տրամաբանությունը՝ որպես ուսումնական առարկա: Ասվածից հետևում է, որ դպրոցական մաթեմատիկան, մաթեմատիկական կրթությունը պետք է դիտել ոչ թե սոսկ որպես մաթեմատիկայի ուսուցում, այլ մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով սովորողի կրթության կազմակերպում:

Իսկ ինչպիսի՞ն պետք է լինի այդ դեպքում մաթեմատիկական կրթության ճարտարապետական կառույցը: Ինչպես և ճարտարապետության մեջ ընդհանրապես, այստեղ նույնպես օգտակար է հետևել Մարկոս Վիթրովիոսին և ամեն ինչ անել՝ հաշվի առնելով այդ ճարտարապետության ամրությունը, օգտակարությունը և գեղեցկությունը (տես [65]): Մաթեմատիկական կրթության ամրությունը նրա բերած ճշմարտությունն է, ներառարկայական և միջառարկայական կապերի ուժը, օգտակարությունը՝ նրա տված բարիքը. «մաթեմատիկական կրթությունը բարիք է, որից իրավունք ունի օգտվելու յուրաքանչյուր մարդ» (տես [200]), իսկ գեղեցկությունը արտահայտվում է նրա բովանդակային կառույցի, լեզվի, կիրառությունների գեղագիտական գրավչությամբ, դրանց մեջ գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշների և ուսուցման գործընթացում գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ ամենալայն դրսևորումներով:

Եվս մեկ հարց. ինչպիսի՞ն պետք է լինի մաթեմատիկական կրթության հիմնական առանցքը՝ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացը: Հասկանալի է, որ այն գուտ մաթեմատիկայի դասագիրք լինել չի կարող. նրա կարևոր բաղկացուցիչ տարրերից մեկը կիրառական ոլորտն է կամ կիրառական ֆոնը, ինչը տարրալուծվում է դասընթացում ներառվող մաթեմատիկական բոլոր թեմաների մեջ: Մինևույն ժամանակ, մաթեմատիկայի ու նրա կիրառական ֆոնի այդ համադրական նյութի ուսուցումը պետք է նպատակատուղված լինի սովորողների աշխարհընկալման, մտածողության և հոգեկան այլ գործընթացների, արժեքային ողջ համակարգի ձևավորմանը և զարգացմանը:

Գեղագիտական արժեքները նույնպես մաթեմատիկայում և համապատասխան ուսումնական դասընթացում դրսևորվում են տարբեր կերպ: Եթե մաթեմատիկայում գեղեցիկը կամ տգեղը կարող են հանդես գալ միայն որպես մաթեմատիկական այս կամ այն տեսությանը, հայտնագործությանը, թեորեմին, ապացուցմանը, խնդրին ու նրա լուծմանը տրված

գնահատական, ապա մաթեմատիկական կրթության մեջ գեղեցիկը գիտելիքի, ճշմարտության կողքին կանգնած արժեք է, որին և հիմնականում միտված է ուսուցման գործընթացը:

Անշուշտ, մաթեմատիկայի դասընթացում ընդգրկված բուն մաթեմատիկական նյութը առանցքային նշանակություն ունի մաթեմատիկական կրթության կազմակերպման համար: Այդ նյութն է, որ հնարավորություն է տալիս ձևավորել մաթեմատիկայի դասընթացի կիրառական ոլորտը, իրականացնել ուսումնական այլ խնդիրներ, մասնավորապես՝ արժեքների, այդ թվում՝ գեղագիտական արժեքների ձևավորման խնդիրը: Եվ, հետևաբար, առաջանում է ևս մեկ հարց. ի՞նչ սովորեցնել կամ մաթեմատիկական ի՞նչ նյութ ընդգրկել մաթեմատիկայի դասընթացում:

Հասկանալի է, որ մաթեմատիկական տարբեր թեմաներ ունեն վերը նշված հարցերի լուծման տարբեր ներուժ: Ինչ վերաբերում է գեղագիտական արժեքների ձևավորմանը, ապա բնական է ենթադրել, որ այստեղ մեծ է մաթեմատիկական այն նյութերի ներուժը, որոնք աչքի են ընկնում համաչափության, համեմատության, ներդաշնակության և մաթեմատիկական գեղեցիկի այլ հատկանիշներով, ներքին և արտաքին գեղագիտությամբ:

Դպրոցական դասընթացում մաթեմատիկական նյութի ընդգրկումը տարբեր երկրներում իրականացվում է տարբեր կերպ: Ահա, օրինակ, թե ինչ է ասում այդ կապակցությամբ Վ. Տիխոմիրովը. «Իսկ ի՞նչը սովորեցնել: Այն, ինչ միշտ սովորեցրել են դպրոցում. հանրահաշիվը, մասնավորապես գծային հավասարումների տեսությունը (միգուցե որոշ չափով՝ գծային անհավասարումների տեսություն. հրաշալի օրինակներ կարելի է բերել տնտեսագիտությունից): Այնուհետև, երկրաչափությունը, որը կարողանում է ամենատարրական մակարդակով մարդուն ցույց տալ, թե ինչ է գիտական ճշմարտությունը, և խնդիրների լուծման միջոցով լարել միտքը: Ապա, անալիզը, որը մարդուն հնարավորություն է տալիս տեսնել, թե ինչպես է կառուցված փոփոխվող մակրոաշխարհը, ինչը ոչ այնքան «վատ» կառավարվում է դիֆերենցիալ հավասարումներով: Եվ, վերջապես, հավանականությունների տեսությունը, ինչը սովորեցնում է միկրոաշխարհի և քառսի օրինաչափությունները» (տես [200]):

Հասկանալի է, որ առկա են նաև բազմապիսի այլ տեսակետներ: Եվ չնայած դրանց բազմազանությանը՝ կան նյութեր, որոնք ընդգրկվում են բոլոր երկրների մաթեմատիկայի դասընթացներում, որոնց հիմքում ըն-

կած է նաև մեր երկրի կրթական փորձը և որոնց ուսուցման նպատակահարմարության վերաբերյալ կարելի է անել որոշակի վերապահումներ:

Այսպես, լուրջ խորհրդածությունների տեղիք է տալիս ավագ դպրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում տարաբնույթ հավասարումների և դրանց համակարգերի ընդգրկումը, լոգարիթմական և եռանկյունաչափական ֆունկցիաներին հատկացված նյութերի մեծ ծավալը, կիրառական ոլորտի հպանցիկ ներգրավվածությունը և այլն: Անհասկանալի է նաև հումանիտար ու մասնագիտական հոսքերի ծրագրային նյութերի և դասընթացներում դրանց շարադրանքների ոչ մեծ տարբերությունը, արժեքների, մասնավորապես՝ գեղագիտականի ձևավորմանն ուղղված նյութերի ներուժի աննշան առկայությունը: Եվ եթե մասնագիտական հոսքերում բուհական ընդունելության հետ կապված խնդիրը սովորողին ստիպում է սերտել առաջարկվող նյութը, ապա հումանիտար հոսքերում դրանց նկատմամբ առկա է կատարյալ անտարբերություն:

Խորհելու առիթ է տալիս նաև միջին դպրոցի հանրահաշվի ծրագրից կիրառական բնույթի նյութերի օտարումը, կիրառական ֆունի գրեթե բացակայությունը գործող ռուսական դասագրքերում: Նախկին ծրագրից հանվել են նաև տրամաբանության, հավանականությունների ու վիճակագրության տարրերին նմիրված նյութերը: Հասկանալի է, որ այս պարագայում դժվար է համակողմանիորեն իրականացնել արժեքների, մասնավորապես՝ գեղագիտական արժեքների ձևավորման խնդիրը:

Մաթեմատիկայի դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառումը շոշափելիորեն մեծացնում է մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով գեղագիտական արժեքների ձևավորման հնարավորությունները: Ընդ որում, խոսքը վերաբերում է ոչ միայն և ոչ այնքան բուն տրամաբանության հանրահաշվի միջոցով գեղագիտական արժեքների ձևավորման լրացուցիչ հնարավորությունների ստեղծմանը, որքան տրամաբանության տարրերի ներգրավման միջոցով մաթեմատիկական ողջ նյութի շարադրման գեղագիտական գրավչության մեծացմանը:

Նախ, տրամաբանության հանրահաշվի տեսական նյութի շարադրման մեջ դրսևորվում են գիտական գեղեցիկի համարյա բոլոր օրյեկտիվ հատկանիշները, իսկ գործնական՝ վարժությունների և խնդիրների համակարգը հնարավորություն է տալիս ներգրավել նաև գիտական գեղեցիկի մի շարք սուբյեկտիվ հատկանիշներ:

Այնուհետև, եթե նկատի ունենանք, որ առանց տրամաբանության տարրերի ներգրավման գրեթե անհնար է ապահովել մաթեմատիկական

նյութի շարադրման տրամաբանական խստությունը, ապա պարզ է դառնում տրամաբանության հանրահաշվի դերը գիտական գեղեցիկի այս կարևոր օբյեկտիվ հատկանիշի ձևավորման խնդրում: Ավելացնենք նաև, որ մաթեմատիկական ապացուցումը չի կարող խստորեն իրագործվել առանց տրամաբանական հիմնավորվածության: Հետևաբար, տրամաբանական խստությունը մաթեմատիկայի գեղագիտական էությունն արտահայտող ամենակարևոր հատկանիշն է, և նրա լիարժեք դրսևորման գործում անգնահատելի է տրամաբանության տարրերի դերը և, ուրեմն, ներառման կարևորությունը մաթեմատիկայի դասընթացում:

Տրամաբանության օրենքների իմացությունը հնարավորություն է տալիս հստակեցնել, հիմնավորել, փաստարկել մաթեմատիկական (և ոչ միայն մաթեմատիկական) դատողությունները: Օրինակ, հանրահայտ է, որ գիտական գեղեցիկի այնպիսի օբյեկտիվ հատկանիշ, ինչպիսին համաչափությունն է, լայնորեն դրսևորվում է բնության ամենատարբեր առարկաների և երևույթների, գիտության տարբեր բնագավառների, արվեստի ու գրականության մեջ (տես [14]-[18], [47]): Պարզվում է, որ այդ հատկանիշով օժտված են նաև մտածողության, նրա հիմքը հանդիսացող տրամաբանության շատ հասկացություններ, մասնավորապես բանաձևերի տրամաբանական գումարը և արտադրյալը: Համարժեքության այնպիսի հատկություններ, ինչպիսիք են անդրադարձելիությունը, համաչափությունը, փոխանցականությունը, թույլ են տալիս դրանց նկատմամբ կիրառել տրամաբանական քայլեր, որոնք չեն հիմնավորվում առանց տրամաբանության ներգրավման, և դրանց իրականացումը դառնում է թերի: Օրինակ, բանաձևերի համակարգերի և համախմբերի լուծման ընթացքում դասագրքերում և մեթոդական գրականության մեջ առանց հիմնավորման ազատորեն թույլ է տրվում բաղադրիչների տեղափոխություն: Դրա մեթոդական «հիմնավորումն» այն է, որ աշակերտները չեն գիտակցում նման հիմնավորման անհրաժեշտությունը: Բայց ճշմարտության բացահայտման անհրաժեշտությունը չգիտակցելը դեռևս չի ազատում նրա բացահայտման անհրաժեշտությունից: Իսկ երբ համակարգը սահմանվում է տրամաբանական արտադրյալի, իսկ համախումբը՝ տրամաբանական գումարի միջոցով, ապա տրամաբանական այդ գործողությունների համարժեքության հատկությունը թույլ է տալիս և հիմնավոր դարձնում համախմբերի ու համակարգերի բաղադրիչների նկատմամբ տեղափոխության և այլ գործողությունների կատարումը:

Մաթեմատիկական նյութի շարադրանքի մեջ տրամաբանության տարրերի ներառումը ընդգծում և մեծացնում է նաև գիտական գեղեցիկի այնպիսի օբյեկտիվ հատկանիշներ, ինչպիսիք են հստակությունը, բազմազանությունների միասնականությունը, ընդհանրականությունը և այլն:

Չափազանց կարևոր է նաև հավանականությունների տեսության և վիճակագրության տարրերը հանրակրթության մաթեմատիկայի դասընթաց ներգրավելու և նյութի գեղագիտական գրավչությունը բացահայտելու հարցը: Այստեղ նույնպես հաճախ տրամագծորեն տարբեր են ինչպես մասնագետների մոտեցումները, այնպես էլ տարբեր երկրների հանրակրթական ծրագրերում դրանց ներգրավվածության չափերը: Համեմատության համար նշենք, որ հավանականությունը և վիճակագրությունը կազմում են Մեծ Բրիտանիայի բարձր դասարանների մաթեմատիկայի ծրագրերի ծավալի մոտավորապես կեսը, իսկ Խորհրդային Միության այդ դասարանների ծրագրերում դրանք բացակայում էին: Եվ միայն վերջին շրջանում ՌԴ միջին դպրոցի հանրահաշվի որոշ դասագրքերում ներառված են նախնական տեղեկություններ հավանականությունների և վիճակագրության տարրերի վերաբերյալ: Մեր հանրապետության ուսումնական ծրագրերում հավանականությունների տեսության տարրերը ունեն աննշան կիրառություն. Ավագ դպրոցում դրանք ուսումնասիրում են շատ փոքր ծավալով, իսկ միջին դպրոցի ծրագրերից էլ ընդհանրապես հանվեցին կրթական վերջին «բարեշրջումների» ընթացքում: Այնինչ հավանականությունների տեսությանը և վիճակագրությանը նվիրված նյութերը աչքի են ընկնում ոչ միայն իրենց բազմապիսի կիրառություններով, այլև հետաքրքրությամբ, բացառիկ ինքնատիպությամբ, ստոխաստիկական մտածողության ձևավորման ու զարգացման բացառիկ ու եզակի հնարավորություններով:

2. Մաթեմատիկական կրթության նպատակները և գեղագիտական արժեքների ձևավորումը

Մաթեմատիկական կրթության առջև դրվում են մի շարք նպատակներ, որոնք, սովորաբար, բաժանվում են ըստ հանրակրթական, դաստիարակչական և զարգացնող ուղղվածությունների: Նշենք, որ նման բաժանումը շատ պայմանական է և միայն մոտավոր պատկերացում է տալիս ուսումնասիրվող նյութի մասին: Ըստ այդմ, մաթեմատիկայի դասավանդ-

ման հանրակրթական նպատակները ենթադրում են սովորողների կողմից մաթեմատիկական գիտելիքների, կարողությունների և ունակությունների, մաթեմատիկայում կիրառվող իմացության հնարքների ու մեթոդների համակարգի տիրապետում, ինչը հնարավորություն կտա պատկերացում կազմելու մաթեմատիկայի մասին՝ որպես իրականության ճանաչման և նկարագրության ձևի, իրականացնելու պրակտիկ գործունեություն, ուսումնասիրելու հարակից ուսումնական առարկաները և շարունակելու կրթությունը: Նպատակների այս համակարգի մեջ թեև չի նախատեսվում գեղագիտական տարրի անմիջական ձևավորում, բայց դրա իրականացման հիմքում ընկած ուսումնական նյութի մեջ առկա գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշները, գեղեցիկի ներքին և արտաքին դրսևորումների բազմազանությունը նպաստում են մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով գեղագիտական արժեքների ձևավորմանը, ինչը դառնում է գեղեցիկի ձևավորման անուղղակի նպատակ:

Մաթեմատիկական կրթության դաստիարակչական նպատակները ենթադրում են սովորողների բարոյական և գեղագիտական դաստիարակության, արժեհամակարգի և արժեքային կողմնորոշման ձևավորման իրականացում: Մասնավորապես, բարոյական արժեքների շրջանակներում ենթադրվում է մարդկային համակեցության հիմքում ընկած հիմնական բարոյական արժեքների ձևավորումը, ազգային և համամարդկային արժեքների շրջանակներում ենթադրվում է դրանց ճանաչման միջոցով հայրենասիրության, մարդու և ժողովուրդների նկատմամբ հարգանքի ձևավորումը: Այստեղ գեղագիտական դաստիարակության շրջանակներում ենթադրվում է մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով գեղագիտական հիմնական արժեքների և գեղագիտական կատեգորիաների ձևավորում: Ինչպես տեսանք գեղագիտական կատեգորիաներին նվիրված պարագրաֆում, մաթեմատիկան այս ուղղությամբ ունի կրթական մեծ ներուժ:

Մաթեմատիկական կրթության զարգացնող նպատակները ենթադրում են սովորողների լեզվական, տրամաբանական, ալգորիթմական և էվրիստիկական մտածողության, ուշադրության, հիշողության, հուզականային ոլորտի, երևակայության և հոգեկանի այլ կողմերի, ինչպես նաև աշխարհայացքի զարգացում: Անձի հոգեկանի գեղագիտությանը նվիրված գլխում մենք առիթ ունեցանք համոզվելու, որ հոգեկանի նշված կողմերը մեծապես պայմանավորված են մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացով, և դրանց զարգացման գործում կարելի է արձանագրել լուրջ հաջողություններ վերջինիս խելամիտ կազմակերպելու դեպքում:

Հարկ է նշել, որ մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում գեղեցիկը որոնվում և հայտնաբերվում է ուսուցանվող մաթեմատիկական յուրաքանչյուր նյութի, նրա առանձին մասերի և տարրերի, ուսուցման մեթոդների, եղանակների, ձևերի ու միջոցների մեջ և նպատակաուղղվում է սովորողի գեղագիտական ունակությունների ձևավորմանն ու զարգացմանը:

Արժե նշել նաև, որ հիմքում ունենալով զուտ օգտապաշտական նկատառումներ՝ դպրոցական մաթեմատիկայի բովանդակությունից ավանդաբար դուրս են մնում կամ նրանում լիարժեք չեն ներառվում համաչափության, համեմատության և գեղեցիկի մաթեմատիկայի հետ առնչվող այլ նյութեր, որոնք լայն կիրառություն ունեն արվեստի զանազան բնագավառներում, տեղավորվում են ուսուցման նպատակների իրականացման այս համատեքստում և, միևնույն ժամանակ, կարող են ավելի գրավիչ դարձնել մաթեմատիկայի դասավանդման գործընթացը՝ մեծացնելով նրանում գեղագիտական տարրի առկայությունը:

3. Մաթեմատիկական կրթության գործառույթները և գեղեցիկի ձևավորման խնդիրը

Մաթեմատիկական կրթության նպատակներից բխում են նրա գործառույթները: Այստեղ հանրակրթական, դաստիարակչական և զարգացնող տեսակների հետ միասին դիտարկվում են նաև տեղեկատվական, էվրիստիկական, կանխատեսող, պրակտիկ, վերահսկող, գնահատող, ինտեգրող, արժեքների ձևավորման և այլ գործառույթներ:

Մաթեմատիկայի ուսուցման հանրակրթական գործառույթը միտված է նրա հանրակրթական նպատակների իրականացմանը: Այստեղ մաթեմատիկայի ուսուցանվող նյութում առկա գեղագիտականի տարրը, եթե անգամ չի գիտակցվում սովորողի կողմից, ապա գոնե ենթագիտակցության մակարդակով ազդում է նրա գեղագիտական ունակությունների ձևավորման և զարգացման վրա:

Մաթեմատիկական կրթության դաստիարակչական գործառույթը, դաստիարակության ընդհանուր խնդիրների իրականացման շրջանակներում, հնարավորություն է տալիս իրականացնել նաև գեղագիտական դաստիարակության, գեղագիտական արժեքների ձևավորման գործառույթ:

Զարգացնող գործառույթը իրականացնում է սովորողի ճանաչողական ունակությունների և հոգեկան երևույթների ձևավորում ու զարգացում, այդ թվում՝ մտային գործունեության համար անհրաժեշտ տրամաբանական հնարքների ձևավորում, ուշադրության, հիշողության, մտածողության, կամքի, ճանաչողական ակտիվության և ինքնուրույնության ընդունակությունների զարգացում: Զարգացման այս ընդհանուր գործառույթի իրականացման շրջանակներում ներառվում են նաև գեղագիտական որակները, որոնք արդյունք կարող են լինել ինչպես թվարկված ունակությունների զարգացման, այնպես էլ մաթեմատիկական նյութերում գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշների, դրանց ներքին ու արտաքին գեղագիտության դրսևորման:

Տեղեկատվական գործառույթով նախատեսվում է ուսուցման ընթացքում սովորողներին ծանոթացնել մաթեմատիկական գաղափարների ձևավորման պատմության, մաթեմատիկոսների կյանքի, մաթեմատիկայի նկատմամբ նրանց զանազան մոտեցումների հետ, տեղեկություններ ստանալ մաթեմատիկայի առանձին նվաճումների մասին: Բնականաբար, այստեղ ներառվում են այնպիսի հետաքրքիր և ուսանելի պատմություններ, որոնք աչքի են ընկնում գեղագիտական գրավչությամբ, ինչով հարուստ է մաթեմատիկայի պատմությունը:

Էվրիստիկական գործառույթը կոչված է ստեղծելու աշակերտների ընդունակությունների և ստեղծագործական կարողությունների զարգացման հնարավորություններ: Ստեղծագործական ունակությունները իհատ են գեղեցիկի անմիջական գուգորդմամբ: Իսկ այս գործառույթի իրականացման ընթացքում կարող են դրսևորվել մաթեմատիկական գեղեցիկի ինչպես օբյեկտիվ, այնպես էլ սուբյեկտիվ հատկանիշներ:

Կանխատեսող գործառույթը ենթադրում է սովորողի մոտ ձևավորել երևույթների կանխատեսման ունակություններ, առաջադրել վարկածներ, գտնել այլընտրանքային լուծումներ, գնահատել դրանք: Չպետք է մոռանալ, որ որոնվող մաթեմատիկական օբյեկտը անպայման պետք է լինի գեղեցիկ, այսինքն բավարարի մաթեմատիկական գեղեցիկի այս կամ այն օբյեկտիվ հատկանիշի (նորից հիշենք Հարդիի այն միտքը, որ տգեղ մաթեմատիկա գոյություն չունի): Մինևույն ժամանակ, նշված գործընթացները ենթադրում են ինտելեկտուալ որոնում, և դրա արդյունքում գտնելու, հայտնագործելու գործառույթի իրականացում, ինչը մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշ է:

Պրակտիկ գործառույթը ենթադրում է մաթեմատիկական նպատակաուղղել դեպի իրականության երևույթների ուսումնասիրություն, կիրառական ուղղվածություն, մոդելավորում և գործնական վարժությունների ու խնդիրների լուծում: Այստեղ գեղագիտական տարրը ավելի ակտիվ է դրսևորվում մաթեմատիկական մոդելավորման ընթացքում (տես սույն աշխատանքի չորրորդ գլուխ, [21]):

Վերահսկման-գնահատման գործառույթը ուղղված է ուսման որակի վերահսկողությանը և իրականացնում է սովորողների գիտելիքների, կարողությունների և ունակությունների վերահսկողություն, շտկում և գնահատում: Հարկ է նշել, որ մաթեմատիկական կրթության և կրթության համակարգի կազմակերպումն, ընդհանրապես, իր գնահատման և վերահսկողության իրականացման ներկայիս մեթոդներով, ձևերով ու եղանակներով տեսադաշտից դուրս է թողնում գեղագիտական և մնացած արժեքների ձևավորման գործընթացը, ինչը, պետք է նաև խոստովանել, իրականում չափազանց դժվար իրագործելի խնդիր է:

Ինտեգրման գործառույթը ուղղված է ուսուցանվող մաթեմատիկական նյութի ներքին կապերի, առանձին հասկացությունների և դրանց հատկությունների միջև փոխհարաբերությունների գիտակցմանը և բացահայտմանը: Այդ կապերում և փոխհարաբերություններում դրսևորվում են մաթեմատիկական գեղեցիկի զանազան օբյեկտիվ հատկանիշներ, ինչի պատճառով դրանց գիտակցումը, բացահայտումը և ուսուցումը կարելի է համարել նաև գեղագիտական գործունեություն:

Արժեքների ձևավորման գործառույթը ուղղված է սովորողի արժեքային համակարգի, նրա արժեքային կողմնորոշման ձևավորմանը: Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի ներուժը կարելի է օգտագործել՝ այդ գործառույթի իրականացման մեջ ներգրավելով ճշմարտական, բարոյական, գեղագիտական, հոգեկան, ազգային և համամարդկային արժեքները: Սրա մաս է կազմում գեղագիտական արժեքների ձևավորման գործառույթը, որով իրականացվում է մաթեմատիկական նյութի մեջ գեղագիտական արժեքների ճանաչումը և դրանց միջոցով գեղագիտական ունակությունների ձևավորումը:

4. Մաթեմատիկական կրթությունը հումանիստական հարացույցի պայմաններում

Ժամանակակից կրթական երկու հիմնական հարացույցերից մեկը հենվում է կրթական ավտորիտար համակարգի վրա, որտեղ առաջին պլան է մղվում գիտելիքահեն կրթությունը: Այս համակարգում աշակերտը կրթության օբյեկտ է, ապագա քաղաքացի, որին անհրաժեշտ են գիտելիքներ և կարողություններ հասարակության, պետության, ազգի առջև ծառացած խնդիրները լուծելու համար: Կրթական հումանիստական հարացույցում աշակերտը դիտվում է որպես սուբյեկտ, մարդ, որն ունի իր ներաշխարհը, և կրթության նպատակը այդ ներաշխարհի ձևավորումն է այն հաշվով, որ մարդը, աշակերտը երջանիկ ապրի իր կյանքի լավագույն՝ մանկության և պատանեկության տարիները, կարողանա ներկա և ապագա կյանքում լավագույնս կողմնորոշվել իր առջև ծագած խնդիրների մեջ, լուծել դրանք: Այստեղ առաջնայինը արժեքներն են՝ արժեքային մոտեցումը, իսկ բարձրագույն արժեքը մարդն է: Առաջին հարացույցի պատվիրատուն ավտորիտար, երկրորդինը՝ հումանիստական ժողովրդավարական տնտեսական-հասարակական-քաղակական համակարգերն են (տես [185]):

Մեր երկիրը կարծես վաղուց է հեռացել խորհրդային ավտորիտար տնտեսական-հասարակական-քաղաքական համակարգից և որդեգրել հումանիստական արժեքները դավանող համակարգերի ուղին: Սակայն կրթության բնագավառում (հավանաբար, կրթությունը բացառություն չէ) շարունակում են իշխել ավտորիտար մոտեցումները: Ճիշտ է, նոր դարի սկզբին մշակվեց և փորձ արվեց գործածության մեջ դնել հումանիստական հարացույցին միտված պետական Կրթակարգը և Հանրակրթության պետական չափորոշիչը, որտեղ արժեքները կազմում էին կրթության բովանդակության կարևոր բաղադրիչներից մեկը, սակայն հետագայում դրանք հանվեցին շրջանառությունից և գործածության մեջ դրվեց ավտորիտար ոգուն հարազատ նոր Չափորոշիչ, որում անտեսվեցին նաև արժեքները: Գործածությունից հանվեցին նաև հումանիստական արժեքներին միտված առանձին առարկայական չափորոշիչներ, ծրագրեր, դասագրքեր...

Հումանիստական հարացույցի կարևոր սկզբունքներից մեկը կրթության հումանիզացիան է՝ կրթության նպատակաուղղումը դեպի մարդը, նրա պահանջմունքները (լատիներեն *humanus* նշանակում է մարդկային):

Եվ այստեղ հումանիստական մոտեցումը ելնում է առաջին հերթին մարդու պահանջներից, նրա հետաքրքրություններից: Իսկ ինչպիսի՞ պահանջմունքներ ունի մարդը՝ աշակերտը, քաղաքացին:

Ինչպես նշվեց վերևում՝ երեխան, պատանին պետք է երջանիկ ապրի իր կյանքի լավագույն տարիները: Իսկ երջանկությունը անհնար է պատկերացնել առանց գեղեցիկի: Սա վերաբերում է նաև կրթությանը և նրա մաթեմատիկական բաղադրիչին:

Անդրադառնանք վաղվա քաղաքացուն. ինչո՞վ է զբաղվելու նա իր մասնագիտական գործունեությունից դուրս: Արդյո՞ք հանրակրթությունը ապահովում կամ տալիս է այն հիմքերը, որոնք հնարավորություն կտան մարդուն ապրել լիարժեք կյանքով: Այս հարցերի պատասխանը ստանալու համար բավական է նշել, որ մարդու «ազատ ժամանակը» լցվում է ոչ թե մաթեմատիկայի, ֆիզիկայի, քիմիայի կամ դպրոցում ուսումնասիրվող այլ ուսումնական առարկաների ուսուցման ընթացքում սերտած նյութով զբաղվելով կամ դրա շուրջ խոսակցություններով, այլ առաջին հերթին արվեստով՝ կինո, թատրոն, երաժշտություն և այլն: Իսկ ինչպիսի՞ նախապատրաստություն է ստացել մարդը հանրակրթությունում արվեստական իր այդ կյանքի համար. ի՞նչ երաժշտություն պետք է լսի նա, ինչպե՞ս գանազանի երաժշտական տարբեր կատարումները: Մրանք կարևորագույն հարցեր են, որոնք դուրս են մնում հանրակրթության ուշադրությունից: Հաճախ մենք դժգոհում ենք ծափզը նախընտրող մարդուց, բայց մոռանում ենք, որ նրա գեղագիտական ճաշակը ձևավորելու համար հանրակրթությունում որևէ քայլ չենք իրականացրել: (Նույնը վերաբերում է նաև բարոյական ոլորտին. մարդու բարոյական մոտեցումները, մարդկային փոխհարաբերություններում ամենուրեք դրսևորվող բարոյական արժեքները և նորմերը դարձյալ անտեսված են հանրակրթության կողմից:)

Ահա թվում է, թե կրթության հումանիզացիան կոչված է կարգավորելու հանրակրթական ուսումնական բնագավառների, առարկաների չափաբաժինը, գիտության և արվեստի, գիտելիքի և արժեքի փոխհարաբերությունը, վերացնելու գիտության և գիտելիքի անվերապահ գերակայությունը արվեստի ու արժեքի հանդեպ:

Եվ եթե հանրակրթության մեջ արվեստը, արժեքները զրավում են իրենց արժանի տեղը, եթե հանրակրթության ուսումնական պլաններում արվեստի բնագավառը չի ավարտվում միջին դպրոցի ցածր դասարաններում իր կցկտուր ներկայությամբ, ապա մաթեմատիկական նույնպես հնարավորություն է ստանում նորովի ներկայանալ նաև արվեստի զանազան

բնագավառներում բազմապիսի կիրառություններով, իր գեղագիտական դեմքով:

Հումանիզացիան մաթեմատիկական կրթության պարագայում իրականացվում է ուսուցման անհատականացման և տարբերակման սկզբունքների կիրառմամբ, զանազան տիպի դպրոցներում և դասարաններում մաթեմատիկայի շերտավորված ուսուցմամբ, ուսուցման նպատակների, բովանդակության, ձևերի, մեթոդների և միջոցների արդիականացմամբ: Կարևորվում են ուսուցման ժամանակակից տեխնոլոգիաները:

Կրթական հումանիստական հարացույցում պակաս կարևոր չէ կրթության մեջ ազատության սկզբունքի պահպանումը (տես [200]): Այլընտրանքային ուսումնական առարկաները, ծրագրերը, դասագրքերը պետք է ելնեն աշակերտի նախասիրություններից, հնարավորություն տան ուսուցչին՝ իրականացնելու իր կրթական մոտեցումները, ընտրության իրավունքը: Թվում է աներկբա կրթության բնագավառում կրթական ծրագրերի, դասագրքերի և, ընդհանրապես, կրթության զարգացման համար առողջ մրցակցային միջավայրի ստեղծման անհրաժեշտությունը:

Սակայն ավտորիտար մոտեցումը դարձյալ թույլ չի տալիս իրականացնելու այս մոտեցումները: Գաղտնիք չէ, որ մաթեմատիկայի ուսուցիչների մեծ մասը ուսումնական գործընթացը կենտրոնացնում է մաթեմատիկական հակումներ ունեցող սովորողների վրա, և սովորողների ճնշող մեծամասնությունը դուրս է մնում այդ գործընթացից, իսկ ավագ դպրոցում հումանիտար հոսքերի աշակետները, ըստ էության, անտեսում են մաթեմատիկա առարկան: Այս երևույթների վնասակար հետևանքները արդարության բարոյական արժեքի ձևավորման տեսակետից և երկրի ու հասարակության համար, մենք վերլուծել ենք [14] աշխատանքում: Սխալի արմատները ուսուցիչների և ծնողների կողմից մաթեմատիկայի ուսուցման նպատակների սխալ պատկերացումն է, ինչի մասին խոսվեց վերևում: Իսկ հաղթահարման հիմնական ճանապարհը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը դեպի արժեքների ձևավորումը նպատակաուղղելն է: Այստեղ կարևոր դեր կարող է խաղալ և մաթեմատիկայից չառաջադիմող աշակերտների մոտ առարկայի հանդեպ հետաքրքրություն ձևավորել ուսուցման գործընթացում մաթեմատիկայի, նրա ուսուցման մեթոդների, ուսումնական նյութի՝ հասկացությունների, թեորեմների, ապացուցումների, խնդիրների ու դրանց լուծման գեղագիտական գրավչության բացահայտումը:

Կրթության հումանիտական հարացույցում ենթադրվում է մաթեմատիկական կրթության հումանիտարացում՝ հասարակական կյանքում նրա դերի վերաիմաստավորում, վերաարժևորում, նրանում մարդասիրական բաղադրիչի մեծացում:

Հումանիտական կրթության իրականացման ճանապարհին ենթադրվում է մաթեմատիկայի դասընթացը գերծ պահել տեխնիկավարժանքային բնույթի բարդ առաջադրանքներից, հաշվարկներից և ապացուցումներից, պետք է այն նպատակաուղղել դեպի բնագիտական կիրառություն, գտնել հումանիտար բնագավառի ուսումնական առարկաների հետ առնչություններ, օգտագործել արվեստի զանազան բնագավառներում մաթեմատիկայի բազմապիսի կիրառությունները: Անհրաժեշտ է արմատապես փոխել հումանիտար հոսքերում մաթեմատիկական կրթության բովանդակությունը, մեթոդները, միջոցները՝ տալով դրանց հումանիտար ուսումնական առարկաներին հատուկ երանգ:

Հումանիտական կրթության իրականացման գործընթացում հատուկ նշանակություն է ստանում մաթեմատիկայի կապը գեղեցիկի հետ: Այն հնարավորություն է տալիս տեսնելու առարկաների և երևույթների համաչափությունը, գեղեցիկ համեմատությունները, ռիթմը և ներդաշնակությունը, ինչը լայնորեն արտահայտվում է նաև մտածողության մաթեմատիկական ձևերի մեջ: Այդ պատճառով մաթեմատիկայի միջոցով իրականացվող հումանիտական կրթությունը նպատակաուղղվում և մեծապես նպաստում է սովորողի գեղագիտական ճաշակի, հույզերի, գզգզմունքների և գեղագիտական այլ որակների ձևավորման ու զարգացման գործընթացի իրականացմանը:

5. Մաթեմատիկական կրթության արդիականացումը և գեղեցիկի ձևավորման խնդիրը

Մարդկային կենսագործունեության յուրաքանչյուր ոլորտում արդիականացումը ժամանակի հրամայականն է, հասարակական առաջընթացի գլխավոր գործոնը: Այդպես է եղել մարդկության պատմության ողջ ընթացքում, և բոլոր ժամանակներում արդիականացումը ուղեկցվել է մրցակցությամբ: Մրցակցությունը 21-րդ դարում ավելի ագրեսիվ ու համապարփակ բնույթ է կրում: Քաղաքակրթությունների երկխոսության, գլոբալիզացիայի, ինտեգրման անվան տակ հետևողական աշխատանք է

տարվում արևմտյան արժեքների տարածման և դրանց տիրապետության հաստատման ուղղությամբ: Խնդրի լուծմանը նպաստում է տեղեկատվական և տեխնիկական միջոցների բուռն ու աննախընթաց զարգացումը, մանավանդ՝ համացանցը, որոնք իրենց ազդեցության ոլորտում են պահում գրեթե բոլորին և ամեն ինչ: Կարևորագույն թիրախներից մեկը կրթությունն է. այն նաև արդիականացման կարևոր գործիք է:

Կրթությունը արդիականացվում է հաշվի առնելով մարդու, հասարակության, ազգի և պետության շահերը: Դիտարկենք մաթեմատիկական կրթության արդիականացման այդ տեսանկյունները առանձին-առանձին:

ա. Կրթության արդիականացման անձնային տեսանկյունը: Կրթության կենտրոնական դեմքը մարդն է՝ աշակերտը, որը կարիք ունի զարգանալու, ճանաչելու շրջակա աշխարհը և իրեն, կյանքում գտնելու իր տեղը: Եվ կրթությունը պետք է նրան տա համապատասխան գիտելիքներ և կարողություններ, հոգեկան, բարոյական, գեղագիտական և անձնային այլ որակներ, ստեղծագործական ուժերի և ընդունակությունների զարգացման հնարավորություններ, ձևավորի նրա աշխարհայացքը: Եվ որովհետև աշխարհը, կյանքը հարափոփոխ են, փոփոխվում, արդիականացվում են նաև այն ունակությունները, որոնք անհրաժեշտ են աշակերտին նշված խնդիրները լուծելու համար: Ավելին. քանի որ աշակերտը մասնագիտական, ինքնուրույն գործունեությունը սկսում է տարիներ հետո, ապա արդիականացումը պետք է միտված լինի նաև ապագային:

Այս խնդիրների իրականացումը մեծապես պայմանավորված է նաև ժամանակակից մաթեմատիկական կրթության կազմակերպումով: Մտածողության տրամաբանվածությունը, հստակությունը, ընդհանրականությունը և ճկունությունը, ուշադրության, հիշողության, երևակայության, կամային որակների դրսևորումները, ճշմարիտի, արդարի և գեղեցիկի հետ շփումը, որոնցով մշտապես ուղեկցվում է մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը, մաթեմատիկական կրթությունը դարձնում են ինտելեկտուալ գործունեության և զարգացման անփոխարինելի ասպարեզ: Միևնույն ժամանակ, առարկաների և երևույթների մոդելավորման և նրանց ուսումնասիրության մեջ մաթեմատիկական մոտեցման կիրառումը, ժամանակակից բազմաթիվ մասնագիտություններում մաթեմատիկայի լայն կիրառությունը մաթեմատիկական կրթությանը տալիս են մեծ արժեք: Նշված գործոնները պայմանավորում են մաթեմատիկայի դերը կրթության արդիականացման գործընթացում: Ասվածից հետևում է, որ մաթեմատիկական կրթության բովո՞ղ հաջողությամբ անցած աշակեր-

տը մեծ պահանջարկ ունի և դառնում է թիրախ հարուստ երկրների համար:

Մյուս կողմից, արդիականացումը ենթադրում է արևմտյան լավագույն ուսումնական հաստատությունների հասանելիություն, ինչը համապատասխանում է աշակերտի շահերին, և հնարավորության դեպքում նա կարողանում է կատարել իրեն հարմար ընտրություն: Այս տեսակետից մաթեմատիկական կրթությունը ստեղծում է բացառիկ հնարավորություններ: Այստեղ կիրառելիությունը, կարգը, հստակությունը, օգտակարությունը, ջանքերը, դժվարին խոչընդոտի հաղթահարումը, անսպասելիությունը, անկանխատեսելիությունը՝ որպես գեղեցիկի հատկանիշներ, ավելի լայն ու ընդհանրական նշանակություն են ձեռք բերում և դուրս են գալիս մաթեմատիկական շրջանակներից:

բ. Կրթության արդիականացման հասարակական տեսանկյունը: Հասարակությունը ունի իր շահերը կրթության ոլորտի կենսագործունեության մեջ: Կրթությունը, նախ և առաջ, հասարակական առաջընթացի կարևոր գործոն է: Կրթության արդյունքը՝ մասնագետը, հասարակական լայն պահանջարկ ունի և հասարակական առաջընթացի ապահովման կարևոր նախադրյալ է: Կրթված մարդը հարգվում է հասարակության մեջ, հաճելի է լինել կիրթ, ինտելեկտուալ զարգացած մարդկանց շրջապատում, շփվել, հաղորդակցվել նրանց հետ: Արդիականացումը՝ արևմտյան ժողովրդավարական արժեքների, դրանց կենսագործունեությունն ապահովող հաստատությունների ներթափանցումով կարող է մեծապես նպաստել հասարակական առաջընթացին: Մինևույն ժամանակ արևմտյան անառողջ բարքերի ներթափանցումը, ազգային ավանդույթների, ընտանիքի դերի թուլացումը և արդիականացման այլ անառողջ դրսևորումներ կարող են հասարակության համար բացասական հետևանք ունենալ:

Կրթության արդիականացման մեջ կարևոր նշանակություն ունեն հասարակության շահերը: Ժամանակակից տեխնիկական առաջընթացի, մարդկային շփումների, հաղորդակցության սերտացման պայմաններում հասարակության համար մեծանում է կրթության դաստիարակչական բաղադրիչի նշանակությունը: Այսօր բազմաբնակարանային շենքի մեկ բնակիչը, ռեստորանային երգիչը, վարորդը իրենց աուդիոհնարավորություններով կարող են խանգարել հարյուրավոր բնակիչների հանգիստը՝ նրանց դարձնելով իրենց անձաշակության և ցուցամոլության ցուցադրման ասպարեզ: Եվ դա իրողություն է մեզ մոտ, որից դժվար է խու-

սափել: Համապատասխան օրենքի բացակայության պայմաններում դրանից խուսափելու ուղիները կարող են լինել բարոյական և գեղագիտական: Որովհետև բարոյական, կիրթ մարդը ուրիշի հանգիստը չի խանգարի, իսկ գեղագիտական բարձր ճաշակ ունեցողն էլ իր նախընտրած երաժշտությունը միայն ինքը կլսի (բարձր չի լսի): Հետևաբար, հասարակության համար արդիականացումը պետք է նպատակաուղղված լինի, նախ և առաջ, բարոյական և գեղագիտական որակների ձևավորմանը, ինչի ներուժը ունի նաև մաթեմատիկական կրթությունը:

Արդիականացման հասարակական պահանջի տեսակետից կարևոր է նաև սոցիալական շերտերի վերաբերմունքը կրթության նկատմամբ. մեզանում ունևոր շերտը թելադրում և, ըստ էության, իրականացնում է կրթական իր իդեալը. իրենց երեխաներին տեսնել իրենց կողքին՝ արտասահմանյան դպրոցական կրթություն ստանալով՝ նախապատրաստվել արտասահմանյան համալսարաններում ուսանելու: Արդյունքը՝ օտարալեզու կամ օտար ծրագրերով և դասագրքերով դասավանդվող դպրոցներ, արտասահմանյան կրթական հաստատություններում ուսուցման խթանում և այլն:

Կրթության կազմակերպման հասարակական շահը կարող է նաև մեզ օգնել հաղթահարելու փոքրաթիվության թերաթժեքության բարդույթը: Գիտատեխնիկական զարգացման ներկա մակարդակը և հեռանկարը ցույց են տալիս, որ ապագան ոչ թե մարդաքանակին է, այլ մարդուժինը, որը որոշվում է ոչ թվաքանակով, այլ որակով: Իսկ այդ որակը կախված է առաջին հերթին կրթության որակից:

Մաթեմատիկական կրթությունը այստեղ և մնացած հարցերում ունի իր կարևոր դերը: Բավական է նշել, որ մարդկանց միջև եղած տարաձայնությունների մի զգալի մասը արդյունք է խոսքի անհստակության՝ ոչ միանշանակ ընկալման: Իսկ մաթեմատիկական բացառում է նման դրսևորումները:

գ. Կրթության արդիականացման պետական տեսանկյունը: Չկա կրթություն կամ կրթության արդիականացում առանց պետական շահի հաշվառման: Եվ կրթության կազմակերպումը, արդիականացումը բոլոր երկրներում ելնում է տվյալ պետության շահերից: Կրթության արդիականացումը մեր երկրի համար կարող է ունենալ ինչպես դրական, այնպես էլ բացասական ազդեցություն:

Երկրի համար արդիականացման դրական հետևանքները կարող են լինել արևմտյան կրթական փորձի և նվաճումների օգտագործումը, ժո-

դովրդավարական հաստատությունների ներթափանցումը, կրթամշակութային հայրենական փորձի և, մանավանդ, արժեքների տարածման հնարավորությունը և այլն:

Ավելի նշանակալից են կրթության արդիականացման բացասական հետևանքները: Նշենք դրանցից հիմնականները.

- արևմտյան կրթական առանձին ավանդույթներ և արժեքներ կարող են համահունչ չլինել ՀՀ կրթական նպատակներին և խնդիրներին,

- մեր երկրի հանրակրթական դպրոցների և համալսարանների լավագույն շրջանավարտների արտահոսքը դեպի զարգացած երկրներ, ինչը տնտեսական հսկայական օգուտ է բերում վերջիններիս՝ վնասելով մեզ (մեկ դպրոցական շրջանավարտի արտահոսքի պատճառով մեր երկիրը նյութական և հոգևոր հսկայական վնաս է կրում),

- արևմտյան կրթական հաստատությունների հասանելիությունը մեր գիտակրթական ներուժի կայուն արտահոսքի լուրջ պատճառ է դառնում: Եթե նկատի ունենանք, որ ուսանելու են գնում լավագույն շրջանավարտները, ապա այդ գործընթացը հանգեցնում է մեր գենոֆոնդի անկման,

- արևմտյան տնտեսական բարեկեցությունը կարող է գրավիչ լինել և սովորողների արտահոսքի լրացուցիչ պատճառ դառնալ,

- գերտերությունների մրցակցությունը տարածքաշրջանում, այդ թվում՝ պայքարը կարևորագույն արժեքի՝ մարդուժի համար (ժամանակին պարսից շահ Աբասը դատարկեց Ջուղան),

- շուկայական տնտեսությունը և քաղաքական ազատությունները ընտրություն կատարելու լայն հնարավորություն են ստեղծում մեր և արևմուտքի միջև, իսկ արդյունքը մեր օգտին չէ, ինչը կստիպի արևմուտքում մնալ այնտեղ ուսանած մեր երիտասարդներին:

- շրջափակումը, պատերազմական անորոշ իրադրությունը, սոցիալտնտեսական վատ պայմանները. աշխատատեղերի պակասը, տնտեսության մեջ մրցակցային պայմանների անկատարությունը, օրենքի կողմից ոչ բավարար պաշտպանվածությունը և այլ գործոններ սովորողների ու երիտասարդ կադրերի արտահոսքի լրացուցիչ պատճառ կարող են հանդիսանալ:

Եթե իշխանությունը ելնում է անձնական շահերից, ապա նրան նաև միշտ չէ, որ ձեռնտու է լավ կրթության կազմակերպումը. ինտելեկտուալ զարգացած մարդը հեշտ չի ենթարկվում տարվող քարոզչությանը: Իսկ երբ իշխանությունը առաջնորդվում է պետական շահերով, ապա նա աշխատում է կրթության արդիականացումը իրականացնել այնպես, որ վերացնի նշված բացասական հետևանքները: Դժբախտաբար որևէ հիմք չկա պնդելու, որ կրթության մեր պատասխանատուները իրականացնում են կրթության պետական շահերին միտված արդիականացում:

Անդրադառնալով մաթեմատիկական կրթությանը՝ նշենք, որ այն ունի նաև պետական կարևորություն: Պատահական չէ, որ գերտերությունների միջև մրցակցությունը եղել է նաև կրթական համակարգերի և, առաջին հերթին, դրանց մաթեմատիկական բաղադրիչների մրցակցություն: Չպետք է մոռանալ նաև, որ մաթեմատիկական կրթությունը առաջնային նշանակություն ունի արդի բանակի համար. մաթեմատիկական գիտելիքներով զինված զինվորը ավելի ունակ է հասկանալու բանակի կողմից առաջադրված խնդիրները, մանավանդ կարող է հեշտությամբ տիրապետել ժամանակակից բարդ ռազմական տեխնիկային ու նրա նրբություններին:

Մաթեմատիկական կրթության մեջ գեղեցիկի բացահայտումը, դրա միջոցով այն բոլոր աշակերտների նպատակաուղղումը կրթության արդիականացման պետական շահին միտված գործողություններ են: Այնինչ այսօր մաթեմատիկան, նրա իմացությունը դարձել է երիտասարդության երկրից արտագաղթելու կարևոր միջոցներից մեկը:

դ. Կրթության արդիականացման ազգային տեսանկյունը: Կրթության արդիականացումը պետք է ուղղված լինի նաև հայոց ազգային շահերին: Մեր ազգային առանձնահատկությունները՝ հայրենիքի մի մասի բռնազավթված լինելը, աշխարհով մեկ հայության սփռումը, արևելահայերենի ու արևմտահայերենի առկայությունը և այլ իրողություններ մեր պետության ու նրա կրթական համակարգի առջև դնում են իրենց խնդիրները, որոնք կարող են լուծվել կրթության արդիականացման շրջանակներում: Որտե՞ղ է ծնվում հայ երեխան, ի՞նչ կրթություն է ստանում, ինչպե՞ս նպաստել նրա մեջ ազգային ոգու ձևավորմանը: Այս և նմանատիպ այլ հարցեր պետք է ներառվեն պետության, նրա կրթական ու մշակութային քաղաքականության շրջանակներում:

Ազգային շահը պետք է հաշվի առնել նաև մաթեմատիկական կրթության կազմակերպման գործընթացում: Չպետք է մոռանալ, որ մաթեմա-

տիկան, որպես գիտություն, համամարդկային արժեք է, իսկ մաթեմատիկական կրթությունը խորապես ազգային է: Որևէ այլ երկրի, մանավանդ Ռուսաստանի Դաշնության պես հսկա ու բազմազգ երկրի համար ստեղծված դասագրքերը, օրինակ, չեն կարող ծառայել հայոց պետականության և ազգային շահերին, և մեր դասագրքերը պետք է կազմվեն ոչ միայն մեր երկրի, այլև մեր ազգային շահերից ելնելով: [9]-[11] դասագրքերում, օրինակ, մաթեմատիկայի կիրառական ողջ ոլորտը խառնված է ազգային հենքի վրա: Միաժամանակ նրանցում ներառված անցյալի արևելահայ և արևմտահայ հեղինակների մաթեմատիկայի դասագրքերի խնդիրները լուծում են և հայոց կրթական ավանդույթների պահպանման և հանրակրթության շրջանակներում արևմտահայերենի հետ ծանոթացման խնդիրներ:

Ազգային միասնության գաղափարի իրագործմանն ուղղված ամենամեծ արժեքը ազգային մշակույթն է, որի լուրջ ներկայությունը հանրակրթության բովանդակության մեջ կարևորագույն խնդիր է: Այսօր մենք առաջնահերթ ենք համարում մեր բանակը և մեր հողերը: Սակայն, առանց հայ մշակույթը կրող մարդու, դրանց պահպանումը ժամանակավոր բռնույթ կարող է կրել: Ռիխարդ Վագների «Մաստերգինգեր» օպերան գերմանական հողի մասին է: Ամբողջ օպերայի ընթացքում մաստերները՝ վարպետները (երգի, աշխատանքի) երգում են իրենց հողի երգը, իսկ օպերան վերջանում է հետևյալ իմաստությամբ՝ սրբազան ոչինչ չկա, ո՛չ գերմանական ազգն է սրբազան, ո՛չ գերմանական սահմանն է սրբազան, ո՛չ հողերը, ո՛չ երկիրը, ո՛չ էլ գերմանացին: Միակ սրբազանը գերմանական մշակույթն է, որ պահում է գերմանական ազգը, գերմանական սահմանը, հողերը, երկիրն ու գերմանացուն: Չկա անմշակույթ պետություն և ազգ: Եվ գերմանական էթնոսի ուժը, նրա միասնության ամենահզոր կովանը նրա հզոր մշակույթն է: Գերմանական սահմանը, հողերը, երկրները, գերմանացին փոփոխվում են, իսկ գերմանական մշակույթը հավերժ է ու գերմանական ոգու հզորության արտահայտիչն է, ապագա սահմանների ու նրա ապագայի կերտողը: Սրանով միայն կարելի է բացատրել իր պատմական հայրենիքի զգալի մասը կորցրած գերմանացու անբարդույթ ապրելակերպը, իր համար «նեղիկ» սահմաններում գերմանական պետության ներկայիս ծաղկումն ու իր նախկին թշնամիների հետ վարած ներկա քաղաքականությունը, որ լավագույն դասը կարող են լինել նաև մեզ՝ հայերիս համար, որ ցեղասպանության մասին մեր ամենօրյա թմկահարություններով միայն մարդկային և ազգային թերարժեքության

բարդույթ ենք ձևավորում մեր մատաղ սերնդի հոգում: Այնինչ մեզ անհրաժեշտ է դաստիարակել իր և իր ազգային արժանապատվությունը խորապես գիտակցող և դրանցով ու հաղթանակներով ապրող սերունդ: Մեր պատմությունը նման հաղթանակների օրինակներ շատ է տվել և ստեղծել է հզոր մշակույթ: Դրանք էլ պետք է ընկած լինեն մեր ազգային դպրոցի հիմքում...

§2. ԳԵՂԵՑԻԿԻ ՁԵՎԱՎՈՐՈՒՄԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱՅՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՈՒՄ

Հայերը կատարեցին երբևէ մարդու կողմից կատարված մեծագույն հայտնագործությունը. նրանք բացահայտեցին բանականության հզորությունը:

Մորիս Էլայն

1. Մաթեմատիկական հասկացությունների գեղագիտական գրավչության հիմնախնդիրը

Հասկացությունները կազմում են մաթեմատիկայի և հանրակրթության «մաթեմատիկա» ուսումնական առարկայի հիմնական օբյեկտները: Մաթեմատիկական յուրաքանչյուր տեսություն, ուսումնական առարկայի յուրաքանչյուր թեմա պատմություն է ինչ-որ հասկացության կամ հասկացությունների մասին: Մաթեմատիկական թեորեմները, խնդիրները, վարժությունները միայն դատողություններ, մտահանգումներ են այդ հասկացությունների մասին, իսկ թեորեմների ապացուցումները և խնդիրների ու վարժությունների լուծումները՝ այդ դատողությունների ու մտահանգումների հաստատումներ: Հետևաբար, ուսուցման գործընթացի արդյունավետությունը, նախ և առաջ, պայմանավորված է հասկացությունների ուսուցման հաջողությամբ: Միևնույն ժամանակ մաթեմատիկական հասկացությունները պարունակում են գեղագիտական մեծ ներուժ, ինչը անհրաժեշտ է օգտագործել ոչ միայն գեղագիտական արժեքների ձևավորման, այլև բուն մաթեմատիկական նյութի յուրացման հետագա հաջողությունը ապահովելու համար: Այդ ներուժը, առաջին հերթին, արտահայտվում է գիտական գեղեցիկի հստակության, պարզության, բազմազանությունների միասնության, ընդհանրականության, կարգի և տրամաբանական խստության օբյեկտիվ հատկանիշներով, որոնք լայնորեն դրսևորվում են հասկացությունների ուսուցման գործընթացում:

Մաթեմատիկական հասկացությունների ուսուցման գործընթացում գեղեցիկի ձևավորման խնդիրը քննարկել է Օ. Վ. Չերնիկը (տես [228]): Նա խնդիրը դիտարկում է հասկացությունների ձևավորման հետևյալ փուլերից յուրաքանչյուրում, որոնք առաջարկել է Գ. Ի. Սարանցը [180].

- Հասկացության ներմուծման մոտիվացիան:
- Հասկացության բնութագրիչ կամ էական հատկությունների առանձնացում:
- Հասկացության վերլուծությունը՝ նրա էական կամ բնութագրիչ հատկությունների առանձնացումը, համադրությունը՝ հասկացության սահմանումը:
- Հասկացության սահմանման յուրացումը՝ հասկացության ծավալին պատկանող օբյեկտների ճանաչմանն ուղղված գործողությունների տիրապետումը, նման օբյեկտների կառուցումը:
- Հասկացության կիրառումը կամ օգտագործումը:

Հարկ ենք համարում նշել, որ ինչպես հասկացությունների, այնպես էլ մաթեմատիկական մնացած օբյեկտների գեղագիտական գրավչությունը պայմանավորված է նաև երեխաների տարիքային առանձնահատկություններով և յուրաքանչյուր տարիքային խմբում լուծվում է յուրովի: Ընդ որում, դա վերաբերում է նաև հասկացության ներմուծման այս փուլերից յուրաքանչյուրին:

2. Մաթեմատիկական հասկացությունների գեղագիտական գրավչության արտահայտումը դրանց ներմուծման մոտիվացիայի միջոցով

Հասկացությունների ներմուծման մոտիվացիան ուսուցման արդյունավետության ապահովման անհրաժեշտ պայման է: Այստեղ լավագույն արդյունքների հասնելու համար կարելի է յուրաքանչյուր թեմայի ուսուցման առաջին քայլերից սկսած ներգրավել գեղագիտական տարրը. հասկացությունները այդ թեմայի կամ պատմության հերոսներն են, իսկ թեման, որտեղ գլխավոր հերոսը ներմուծվող հասկացությունն է, նվիրված է այդ հերոսների փոխհարաբերությունների բացահայտմանը կամ պատմություն է հերոսների փոխհարաբերությունների մասին: Ինչքանով է հետաքրքիր այդ պատմությունը, ինչով ենք անում այն, ի՞նչ արժանիքներ ունի պատմության գլխավոր հերոս հասկացությունը: Այս հարցադրումների պատասխանը պետք է տա հասկացության ներմուծման մոտիվացիան՝ նրա ներմուծման դրդապատճառը կամ դրդապատճառները:

Մաթեմատիկական հասկացությունների ներմուծման մոտիվացիայի ճանապարհները բազմազան են, և բազմազան են նաև մոտիվացիայի միջոցով հասկացության գեղագիտական գրավչության արտահայտման հնարավորությունները:

1) Մաթեմատիկական հասկացության ներմուծման մոտիվացիայի միջոցով նրա գեղագիտական գրավչության արտահայտման առաջին պահը կապված է «ինչո՞ւ» հարցադրման պատասխանի ստացման հետ: Անհրաժեշտ է գտնել այդ պատասխանի ստացման գեղեցիկ օրինակներ: Եվ մաթեմատիկական հասկացությունները հիմնականում ունեն մոտիվացիայի նման հնարավորություններ: Դիտարկենք նմանատիպ մի քանի օրինակներ:

- Ինչի՞՞ համար է ներմուծվել լոգարիթմը:
- Ինչի՞՞ համար է անհրաժեշտ ներմուծել ուղիղ անկյան հասկացությունը:
- Ինչի՞՞ համար են անհրաժեշտ անկյան սինուսի, կոսինուսի, տանգենսի և կոտանգենսի հասկացությունները:
- Ինչի՞՞ համար են անհրաժեշտ թվաբանական գործողությունները:
- Ինչի՞՞ համար է անհրաժեշտ հանրահաշիվը:
- Ինչի՞՞ համար է անհրաժեշտ ածանցյալի հասկացությունը,
- Ինչո՞ւ է անհրաժեշտ իմանալ Պյութագորասի կամ Թալեսի թեորեմը:

2) Մաթեմատիկական հասկացությունների ներմուծման մոտիվացիայի միջոցով նրա գեղագիտական գրավչության արտահայտման հաջորդ պահը կապված է նրա հետաքրքրության հետ. ինչո՞վ է հետաքրքիր տվյալ հասկացությունը: Եղիշեի Վարդանանց պատմության գլխավոր հերոսը Վարդան Մամիկոնյանն է, որի նկատմամբ հետաքրքրությունը պայմանավորված է նրա կատարած գործի կարևորությամբ: Դերենիկ Դեմիրճյանը իր վեպում Վարդան Մամիկոնյանի կերպարին հաղորդում է նաև բարոյական, հոգեբանական և ֆիզիկական այնպիսի բարեմասնություններ, որոնք ավելի գրավիչ ու հարազատ են դարձնում այն: Եվ գրականության ուսուցչի համար դժվար չէ աշակերտի ուշադրությունը բեռել կերպարի ու նրա շուրջ հյուսվող պատմության վրա՝ ելնելով կերպարի այդ գրավչությունից: Իսկ ինչո՞վ է հետաքրքիր մաթեմատիկական բազմազան պատմությունների թերևս ավելի հանրահայտ հերոսը, ասենք՝ Էռանկյունը, շրջանագիծը կամ գումարման գործողությունը: Այստեղ նույնպես մեծ նշանակություն ունի գեղագիտական տարրի բացահայ-

տումը, որի ճանապարհները բազմազան են: Այդ հասկացություններից յուրաքանչյուրը տարբեր իրադրություններում հաճախ հանդես է բերում առանձնահատուկ որակներ, որոնք արտահայտվում են նաև գիտական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշներով: Եվ հասկացության ուսուցումը կարելի է սկսել նշելով այդ որակները:

3) Մաթեմատիկական հասկացությունների ներմուծման մոտիվացիայի միջոցով նրա գեղագիտական գրավչության արտահայտման ճանապարհներից է հասկացության ֆոնը՝ բնության այն առարկաները, երեվոյթները, իրադրությունները, որոնք մոդելավորում են տվյալ հասկացությունը: Գումարման գործողության համար նման կիրառություններ են քանակությունների միավորման և քանակության ավելացման մոդելները. իրար հետ ընդհանուր մաս չունեցող երկու համասեռ քանակությունների միավորման քանակությունը հավասար է միավորվող քանակությունների գումարին, և մի քանակությանը նրան համասեռ մյուս քանակությունն ավելացնելուց ստացված քանակությունը հավասար է այդ քանակությունների գումարին: Բոլոր այս օրինակներում դրսևորվում են գիտական գեղեցիկի բազմազանությունների միասնության, ընդհանրականության և կիրառելիության օբյեկտիվ սկզբունքները:

Գեղագիտական տարրի մասնակցությունը մեծանում է, եթե հնարավոր է լինում գտնել հասկացության հնարավորինս գրավիչ, գեղեցիկ կիրառություն: Նման կիրառությունների հրաշալի օրինակներ կարող է տալ գիտության պատմությունը: Գումարման գործողության համար նման հետաքրքիր կիրառություն է Արքիմեդի կողմից փիղը կշռելու վերաբերյալ խնդրի լուծումը, որի համար նա օգտագործում է գումարման գործողությունը՝ փիղը փոխարինելով նրան հավասար ծանրություն ունեցող քարերի որոշ քանակությամբ, իսկ որպես կշեռք օգտագործում է նավը (տես [9]):

4) Մաթեմատիկական հասկացությունների ներմուծման մոտիվացիայի միջոցով նրա գեղագիտական գրավչության արտահայտման հաջորդ պահը նրա հանրաճանաչությունն է. եռանկյունը, գումարումը և մաթեմատիկական այլ հասկացությունները հայտնի են աշխարհի համարյա բոլոր մարդկանց: Այդ հանրաճանաչությունը ավելացնում է յուրաքանչյուր առարկայի գեղագիտական գրավչությունը, գրավում և մոտեցնում է մարդկանց:

5) Մաթեմատիկական հասկացությունների ներմուծման մոտիվացիայի միջոցով նրա գեղագիտական գրավչության արտահայտման համար

կարևոր պահ է նրա կայունությունը. բնության բոլոր առարկաները հարափոփոխ են, իսկ մաթեմատիկական առարկաները՝ անփոփոխ: Տարիները փոխում են մեր սիրած կինոնկարների հերոսներին. երբեմնի ջահել ու գեղեցիկ այդ հերոսները ժամանակին համընթաց անճանաչելիորեն փոխվում են, երբեմն էլ՝ հեռանում կյանքից, և դա մեր կյանքին ավելացնում է մի տխուր երանգ: Մինչդեռ մաթեմատիկական հասկացությունները անփոփոխ են, հարատև ու անանց. դրանք եղել են, կան ու կլինեն՝ տարածությունից ու ժամանակից անկախ, առանց փոփոխվելու, անհասակ ու անտարիք, պատրաստ հայտնվելու ցանկացած մարդու մոքի (և նաև հոգու) մեջ, պատրաստ առանց որևէ շահի ցուցադրելու և ի սպաս դնելու իրենց անսահմանափակ հնարավորությունները: Մրանք կարևորագույն հատկանիշներ են, որով ճանաչվում է գեղեցիկը և տալիս են «ի՞նչ է գեղեցիկը» հարցադրման Պլատոնի պատասխանը (տես [25], էջ 11):

6) Մաթեմատիկական հասկացությունների ներմուծման մոտիվացիայի միջոցով գեղագիտական գրավչության արտահայտման համար կարևոր պահ է նաև նրա համընդհանրությունը և նրանում բազմազանությունների միասնականությունը. այն իր մեջ ներառում է այդ հասկացությունը բնորոշող հատկություններով օժտված բոլոր առարկաները: Դա թույլ է տալիս բոլոր այդ առարկաների ուսումնասիրության ընթացքում նրանց նկատմամբ կիրառել ցանկացած այլ հատկություն, որով օժտված է տվյալ հասկացությունը:

3. Հասկացության գեղագիտական գրավչության արտահայտումը նրա սահմանման միջոցով

Յուրաքանչյուր հասկացության ներմուծման ամենակարևոր պահը նրա սահմանումն է: Տրամաբանության մեջ հասկացության սահմանմանը ներկայացվող պահանջների մեջ առանձնացվում են նրա հակիրճությունը, ճշգրտությունը և պարզությունը: Սահմանումը պետք է լինի հակիրճ. չափազանց երկարաշունչ սահմանումները անհրապույր են, դժվար են ընկալվում և հիշվում: Սահմանումը պետք է գերծ լինի անորոշություններից, երկիմաստ ընկալման հնարավորություն չստեղծի և միարժեքորեն հանգեցնի սահմանվող հասկացության առարկային: Այն պետք է անփոփոխ լինի դիտարկվող տեսության, ուսումնական նյութի

կամ առարկայի շրջանականերում: Նկարագրված պահանջները արտահայտում են գիտական գեղեցիկի հստակության և պարզության հատկանիշները:

Հասկացության գեղագիտական գրավչությունը կարելի է արտահայտել նախ և առաջ վերլուծության՝ նրա էական կամ բնութագրիչ հատկությունների առանձնացման, դրանց համադրության և սահմանման ձևակերպման միջոցով: Օրինակ, կանոնավոր եռանկյան համար բնութագրիչ հատկություն է կողմերի հավասարությունը: Արդյո՞ք կողմերի հավասարությունը բնութագրիչ հատկություն է նաև կանոնավոր քառանկյան համար: Նույնը վերաբերում է նաև անկյունների հավասարությանը: Եվ այս երկու հատկությունների համատեղ առկայությունը համադրությունն է ապահովում քառանկյան կանոնավորությունը: Նմանատիպ օրինակների դիտարկումը բացահայտում է հասկացության էությունը, բնութագրիչ հատկությունների դերը սահմանման մեջ և ապահովում գիտական գեղեցիկի հստակության ու տրամաբանական խստության հատկանիշների լիարժեք դրսևորում:

Դիտարկենք մեկ այլ օրինակ: Ինչպե՞ս կարելի է արտահայտել հասկացության գեղագիտական գրավչությունը «եռանկյան կենտրոն» հասկացության սահմանման ընթացքում: Նախ նկատենք, որ գեղագիտականը, առաջին հերթին, ստեղծագործական գործընթաց է, և դրա բացահայտումը, համապատասխան հուզական վիճակի առաջացումը և դրսևորման աստիճանը պայմանավորված են հետազոտվող հասկացության մեջ գեղագիտական տարրի հայտնաբերման գործում սովորողի մասնակցության աստիճանից. կարելի է ասել այն ուղիղ համեմատական է այդ մասնակցության չափին: Ստորև կատարվող դիտարկումը վերցրել եմ դասավանդման իմ փորձից:

Նախ, խոսակցությունը նպատակահարմար է սկսել ընդհանրապես «կենտրոն» հասկացության մասին. ինչքանո՞վ է կարևոր կենտրոնի հասկացությունը և ի՞նչ է կենտրոնը: Ի՞նչ է և ո՞րն է, օրինակ, գյուղի, քաղաքի, տվյալ երկրի, Երկրագնդի, Արեգակնային համակարգի, աշխարհի կենտրոնը: Հարցը, իհարկե, աշակերտների կողմից միարժեք պատասխան չի ստանում. մեկի համար գյուղի կենտրոնը դպրոցն է, մյուսի համար՝ խաղահրապարակը, երրորդի համար՝ խանութը, որի մոտակայքում մարդիկ հավաքվում են խոսք ու գրույցի, չորրորդի համար՝ իրենց տունը: Աշակերտները հիմնավորում են իրենց պատասխանները: Ըստ էության, դրանք հանգում էին հասկացության իրենց տված բնորոշման բնու-

թագրիչ հատկությունների առանձնացման: Անշուշտ, դրանցում առկա է սուբյեկտիվ պահը: Այդ պատճառով քննարկումները սովորաբար ընթանում են բանավեճի տեսքով և կրում են սուր բնույթ: Ավելի հարթ է ընթանում տվյալ երկրի կենտրոնի որոշման խնդրի լուծման գործընթացը: Պատասխանը գտնում էին բոլորը. այն երկրի մայրաքաղաքն է: Բայց այստեղ էլ տարբեր են լինում աշակերտների բերած բնութագրիչ հատկանիշները: Նմանատիպ քննարկումներից հետո աշակերտներն, ի վերջո, համոզվում են մի բանում՝ իրենց տված ձևակերպումները հստակ չեն: Դրանից հետո տեղափոխվում ենք հստակության դաշտ՝ մաթեմատիկա: Ո՞րն է, օրինակ, հատվածի կենտրոնը: Այստեղ արդեն աշակերտները միակարծիք են. հատվածի կենտրոնը նրա միջնակետն է: Աշակերտները միակարծիք են նաև շրջանագծի կենտրոնը որոշելու խնդրում. բոլորը գտնում են, որ դա այն կետն է, որից շրջանագծի բոլոր կետերը հավասարահեռ են: Իսկ ուղղանկյան կենտրոնը: Ո՞րն է, օրինակ, դասասենյակի հատակի կենտրոնը, որն ունի ուղղանկյան տեսք: Բոլոր աշակերտները նայում են սենյակի կենտրոնին: Բայց այն, որ դա ուղղանկյան անկյունագծերի հատման կետն է, այսինքն՝ ուղղանկյան կենտրոնի բնութագրիչ հատկությունը, դժվարությամբ են գտնում: Կարծես թե հարցը լուծված է, և կարելի է անցնել եռանկյան կենտրոնի որոշմանը: Անենք նաև այդ հարցադրումը, Բայց առաջ չանցնենք. ուսուցումը շտապողականություն չի սիրում: Շտապողականություն չի սիրում նաև գեղեցիկը. այն ձգում է իրեն նայողին, աշխատում է պահել, չի թողնում իրենից հեռանալ: Եվ երկու մոտեցման դեպքերում էլ պահն է չշտապել առաջ անցնելու և տալ մաթեմատիկական ու գեղագիտական հիմնական հարցադրումը՝ «ինչո՞ւ». ինչո՞ւ է ուղղանկյան անկյունագծերի հատման կետը նրա կենտրոնը: Այս հարցի պատասխանը հեշտ չի գտնել: Եվ այստեղ մեզ կարող է օգնել փորձը՝ մեր կյանքից, իրական աշխարհից վերցրած փորձը: Իսկապես, նույն հարցադրումը կատարենք հատվածի համար. ինչո՞ւ է հատվածի միջնակետը անվանվում նրա կենտրոն: Թեև հատվածի ծայրակետերը միարժեքորեն բնութագրում են հատվածը, այնուամենայնիվ, միայն հատվածի ծայրակետերի մասնակցությունը նրա կենտրոնի որոշման հարցում համոզիչ չի թվում: Հիմա դիմենք մեր փորձին: Վերցնենք համասեռ մետաղալարը և աշխատենք այնպես տեղավորել ելուստի վրա, որպեսզի այն պահպանի իր հավասարակշռությունը, այսինքն՝ ընդունի Երկրի նկատմամբ հորիզոնական դիրք: Բնական է (և աշակերտները դրա հետ անմիջապես համաձայնում են), որ հատվածի կենտրոնը

կլինի այն կետը, որով լարը հավասարակշռության պահին հպվում է ելուստին: Եվ այդ կետը հատվածի ծայրակետերից հավասարահեռ կետն է: Աշակերտների համար միանգամայն համոզիչ է և ընդունելի կամայական համասեռ թիթեղի կենտրոն անվանել այն կետը, որով այդ թիթեղը, հպվելով սրածայր ելուստին, պահպանում է իր հավասարակշռությունը: Դրան հաջորդող փորձերը մեզ համոզում են, որ «ճիշտ» են որոշված նաև շրջանագծի և ուղղանկյան կենտրոնները (փորձարկվող շրջանագիծը և ուղղանկյունը պատրաստվում են համասեռ թիթեղից): Այժմ նորից կրկնենք եռանկյան կենտրոնի վերաբերյալ հարցադրումը. ո՞րն է եռանկյան կենտրոնը: Այստեղ արդեն մենք ունենք մեր պատասխանը՝ դա համասեռ թիթեղից պատրաստված եռանկյան այն կետն է, որը սրածայր ելուստի վրա տեղավորելուց հետո, եռանկյունը կպահպանի իր հավասարակշռությունը: Բայց ինչպե՞ս գտնել այդ կետը: Սա բարդ հարց է: Պարզեցնենք այն՝ լուծելով ավելի պարզ ու հեշտ մի խնդիր. Եռանկյունաձև թիթեղը այնպես տեղավորենք գերանի վրա, որ այն պահպանի իր հավասարակշռությունը: Ընդ որում, խնդիրը կարող ենք լուծել և՛ փորձի, և՛ մաթեմատիկական դատողությունների՝ ապացուցման արվեստի միջոցով: Փորձի արդյունքը պարզ է. եթե եռանկյան որևէ գագաթը դնենք գերանի վրա և աշխատենք նրա մնացած մասը այնպես տեղավորել գերանի վրա, որ այն պահպանի իր հավասարակշռությունը, ապա հպման կետ կլինի նաև այդ գագաթին հանդիպակաց կողմի միջնակետը, և որոնելի գիծը կլինի այդ կետերով անցնող հատվածը՝ եռանկյան միջնագիծը: Այժմ խնդիրը լուծենք մաթեմատիկական դատողությունների միջոցով: Եռանկյունը կազմող թիթեղը մտավի տրոհենք նրա որևէ կողմին զուգահեռ շերտերի, որոնք դիտարկենք որպես հատվածներ, և տանենք եռանկյան այն միջնագիծը, որը կանցնի բոլոր այդ հատվածների միջնակետերով: Հասկանալի է, որ եթե եռանկյան այդ միջնագիծը տեղավորենք գերանի վրա, ապա նրա բոլոր շերտերը կլինեն հավասարակշռված և, ուրեմն, հավասարակշռված կլինի նաև եռանկյունը: Այսպիսով, մենք «ապացուցեցինք», որ եռանկյան միջնագիծը այն ուղիղն է, որն անցնում է եռանկյան որևէ գագաթով և որով եռանկյունը տեղավորելով գերանի վրա՝ այն կպահպանի իր հավասարակշռությունը: Բայց նույն դատողությունը կարելի է անել նաև եռանկյան մեկ այլ միջնագծի վերաբերյալ: Իսկ դիտարկվող երկու միջնագծերը հատվում են մեկ կետում: Ուրեմն՝ նրանց հատման կետն էլ կլինի եռանկյան կենտրոնը: Եվ որովհետև եռանկյունը ունի ծանրության մեկ կենտրոն, ապա նրա՝ արդեն երեք միջնագծերն էլ

հատվում են մեկ կետում: Նկատենք, որ վերջին պնդումը թեև ունի մաթեմատիկական հետաքրքիր ապացուցում, բայց նրա զգացական իմացությունը սովորողների մոտ հարուցում է որոշակի դժվարություններ, իսկ բերված «ապացուցումը» պատճառում է գեղագիտական բավականություն, բավարարություն և հաճույք:

Հասկանալի է, որ բոլոր այս դատողությունները չունեն ժամանակակից մաթեմատիկային հատուկ խստություն: Սակայն դրանք ունեն ինտուիտիվ ընկալման պարզություն և ստեղծում են մաթեմատիկական ապացուցումների համար զգացական ամուր հենք: Այդպես են իրենց ապացուցումները կատարել հնադարի մեր ուսուցիչները: Արդեն տասնվեցերորդ դարում այդպես է կարողացել բուրգի ծավալը հաշվել իտալացի մաթեմատիկոս Կավալերին: Բուրգի ծավալը այդպես է հաշվվում նաև այսօր՝ մեր հանրակրթական դպրոցի առանձին դասագրքերում: Այսքանից հետո արդեն աշակերտների մոտ պետք է, որ առաջանա հետաքրքրություն իրենց դիտարկումները մաթեմատիկական ապացուցումներով հիմնավորելու վերաբերյալ: Նշենք նաև, որ եթե մեր կատարած դատողությունները կազմում են խնդրի լուծման գրաֆիկան, ապա այն ապացուցող մաթեմատիկական ճշգրիտ դատողություններն արտահայտում են նրա գեղանկարչությունը:

4. Հասկացության գեղագիտական գրավչության արտահայտումը նրա յուրացման միջոցով

Հասկացության սահմանման իմացությունը դեռևս չի ապահովում նրա յուրացումը: Վերջինիս համար անհրաժեշտ է, նախ, նրա իմաստի՝ բնութագրիչ հատկությունների ընկալում: Բերենք մեկ օրինակ [9] դասագրքից: Քառակուսի արմատի հասկացության սահմանումից հետո, նրա իմաստը հասկանալու համար դասագրքում առաջադրվում են այսպիսի վարժություններ.

- ինչո՞ւ -2-ը 4-ի քառակուսի արմատը չէ,
- ինչո՞ւ 4-ը 4-ի քառակուսի արմատը չէ,
- ինչո՞ւ 2-ը 4-ի քառակուսի արմատն է:

Հիշենք նաև թվի քառակուսի արմատի սահմանումը. a թիվը կոչվում է b թվի քառակուսի արմատ, եթե.

ա. a-ն ոչ բացասական է,

բ. ա-ի քառակուսին հավասար է b-ի:

Առաջարկվող երեք վարժություններից առաջինը բացահայտում է սահմանման ա բնութագրիչ հատկության նշանակությունը, երկրորդը՝ բ հատկության իմաստը, իսկ երրորդը բացահայտում և ամբողջացնում է դրանց միասնական ընկալումը:

Հասկացության յուրացման համար կարևոր է նաև նրա արժեքների՝ հասկացության ծավալին պատկանող, ինչպես նաև այդ ծավալից դուրս ընկած օբյեկտների դիտարկումը, դրանց ճանաչմանն ուղղված գործողությունների տիրապետումը և, անհարժեշտության դեպքում, նման օբյեկտների կառուցումը: Այդ նպատակով սովորաբար հասկացությունների սահմանմանը հաջորդում են հասկացության օրինակների և ժխտօրինակների կառուցումներ և նշված գործընթացներին նպաստող այլ գործողություններ: Այդ գործողություններն ուղղված են նաև գեղեցիկի՝ բազմազանությունների միասնության և ընդհանրականության հատկանիշների դրսևորումների ցուցադրմանը, ինչը մեծացնում է հասկացության գեղագիտական գրավչությունը:

Հաճախ հասկացության սահմանման յուրացումը պահանջում է տարիների նախապատրաստական աշխատանք: Այն կատարվում է հասկացության նախաուսուցման՝ ավելի ցածր դասարաններում նրա ծավալին պատկանող առանձին ներկայացուցիչների, պարզագույն, բայց ոչ անպայման բնութագրիչ հատկությունների հետ ծանոթացման միջոցով: Նման հասկացությունների գեղագիտական գրավչությանն ավելանում են նաև նրա յուրացման համար նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարման, ինտելեկտուալ որոնման և դրա արդյունքը գտնելու կամ հայտնագործելու՝ գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշները: Դիտարկենք նման երկու օրինակ:

Թվի հասկացությունը, հավանաբար, հանրակրթական դպրոցի կարևորագույն հասկացությունն է: Նրա ուսուցումը և յուրացումը մեթոդական լուրջ խնդիրներ է առաջադրում: Այն սկսվում է առաջին դասարանից և վերջանում ավագ դպրոցում, բայց այդպես էլ չի ավարտվում: Բավական է նշել, որ առաջին դասարանի ծրագրում թվի ուսուցումը տարվում է շատ փոքր բաժիններով՝ 1 և 2 թվերը, 1 և 2 թվանշանները, 3 թիվը, 3 թվանշանը. 3 թվի կազմությունը, 4 թիվը, 4 թվանշանը. 4 թվի կազմությունը. 4-ի սահմանում գումարում և հանում և այսպես, մինչև տասը մնացած թվերի համար: Միջին դպրոցի 5-6-րդ դասարաններում ավարտվում է ռացիոնալ թվերի ուսուցումը, իսկ միջին դպրոցի բարձր դասա-

րաններում միայն ծանոթություն է տրվում առանձին իռացիոնալ թվերի մասին: Ավագ դպրոցում կատարվում է իրական թվերի ուսուցումը, բայց հիմնականում գաղափար տալու մակարդակով: Այստեղ իրական թվի և, մանավանդ, իրական ցուցչով աստիճանի հասկացությունների ուսուցումը կրում է սերտողական բնույթ, և չի ապահովվում գիտական գեղեցիկի հստակության, պարզության, տրամաբանական խստության և այլ օբյեկտիվ հատկանիշների իրագործումը: Իսկ գաղափարի անորոշությունը, ընկալման, յուրացման բարդությունը հանգեցնում է նաև գիտական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշների դրսևորման դժվարության: Մեր կարծիքով, իրավիճակից դուրս գալու ելքը իրական թվի գաղափարի աքսիոմատիկ ուսուցումն է, ինչը կարող է լրացվել առանձին իռացիոնալ թվերի (օրինակ, $\sqrt{2}$, π և այլն) կառուցումով: Այս մոտեցումը կարող է լուծել ինչպես իռացիոնալ թվի հասկացության յուրացման, այնպես էլ նրա գեղագիտական գրավչության խնդիրը:

Ֆունկցիայի հասկացությունը միջին և ավագ դպրոցի՝ ուսուցման համար ամենադժվար հասկացությունն է: Նախքան սահմանման ներմուծումը, այն պահանջում է համապատասխան նախաուսուցում, ինչի համար հիմնալի առիթ են ստեղծում համեմատականությունները՝ ֆունկցիաների պարզագույն կիրառական օրինակները, որոնց ուսուցումը կարելի է իրականացնել միջին դպրոցի 5-6-րդ դասարաններում: Նման մոտեցում է կիրառված [9]-[11] դասագրքերում: Իսկ խորհրդային վերջին շրջանի և ռուսական դպրոցական դասագրքերում ֆունկցիայի գաղափարը դրվում էր հանրահաշվի դասընթացի հիմքում, ինչը չի ապահովում ոչ միայն այդ հասկացության, այլև դրա վրա հիմնված այլ հասկացությունների լիարժեք ուսուցումը: Ավելին, ֆունկցիայի գաղափարի ներմուծումից առաջ անհրաժեշտ է աշակերտներին ծանոթացնել դրա ծավալին պատկանող և չպատկանող կենցաղային, կիրառական, մաթեմատիկական բազմապիսի օրինակների հետ: Իսկ ֆունկցիայի գաղափարը կարելի է ածանցել առնչության գաղափարից (մանրամասները տես [7] և [11] աշխատանքներում):

5. Հասկացության գեղագիտական գրավչության արտահայտումը նրա կիրառման միջոցով

Հասկացության գեղագիտական գրավչությունը կարող է արտահայտվել նրա կիրառման միջոցով: Թվի հասկացության կիրառումն արդեն բնության ուսումնասիրության հզոր միջոց է, իսկ տառի, անհայտի կամ փոփոխականի հասկացության կիրառումը հնարավորություն է տալիս դատողություններ, գործողություններ կատարել անհայտ մեծության հետ և, ի վերջո, գտնել այն: Գումարման գործողության հասկացությունը թույլ է տալիս գտնել առարկաների միավորման մեծությունը միավորվող առարկաների մեծությունների միջոցով, իսկ բազմապատկման գործողությունը թույլ է տալիս գտնել ուղղանկյան մակերեսը կամ ուղղանկյունանիստի ծավալը համապատասխան գծային չափումների միջոցով: Հանման և բաժանման հասկացությունները, բացի այլ գործառնություններից, հնարավորություն են ընձեռում կատարել համասեռ մեծությունների համեմատություն: Հավասարման և նրա լուծման հասկացությունների կիրառման միջոցով մենք ստանում ենք բազմաթիվ կիրառական խնդիրների լուծումներն ու պատասխանները: Հաջորդականության միջինի, մեղիանի և մոդայի հասկացությունների միջոցով կարողանում ենք բնութագրել այն, ստանալ հաջորդականության մասին անհրաժեշտ տեղեկություններ: Կշռույթի հասկացության միջոցով կարողանում ենք միավորել և ընդհարացնել արագության, զնի հասկացությունները, և ընդհանրացնել դրանք տարասեռ մեծությունների հարաբերությունների մի ամբողջ շարքի մեջ, որոնք, իրենց հերթին, բնութագրում են զանազան առարկաներ և երևույթներ:

Այս օրինակների ցանկը կարելի է շարունակել: Բոլոր օրինակներում առկա են գիտական գեղեցիկի այնպիսի օբյեկտիվ հատկանիշներ, ինչպիսիք են կիրառելիությունը, բազմազանությունների միասնականությունը, ընդհանրականությունը, հստակությունը, պարզությունը, ինքնատիպությունը: Դրանք հաճախ ուղեկցվում են նաև գիտական գեղեցիկի՝ անկանխատեսելիության, անսպասելիության, ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացության սուբյեկտիվ հատկանիշներով:

§3. ԳԵՂԵՑԻԿԻ ՁԵՎԱՎՈՐՈՒՄԸ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՈՒՄ

Եթե այդպես էլ չկարողացաք թեորեմն ապացուցել, այն կդառնա արսիտ:

Էվկլիդես

Թեորեմները արտահայտում են մաթեմատիկայի հասկացությունների հիմնական հատկությունները, դրանց միջև առկա կապերն ու օրինաչափությունները և, բնականաբար, մաթեմատիկական գեղեցիկի որակավորումը, առաջին հերթին, հասցեագրվում է նրանց: Մովորաբար թեորեմներից յուրաքանչյուրը օժտված է լինում մաթեմատիկական գեղեցիկի մեկ կամ մի քանի օբյեկտիվ հատկանիշով, իսկ դրանց ուսուցման ընթացքում երևան են գալիս նաև մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշները: Թեորեմներին հատուկ են նաև գեղեցիկի արտաքին և, հատկապես, ներքին դրսևորումները: Այդ պատճառով թեորեմները մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով գեղեցիկի ձևավորման կարևոր աղբյուր են:

1. Թեորեմների գեղագիտական գրավչության օբյեկտիվ հատկանիշները

Անդրադառնանք մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշներին, որոնք թեորեմների գեղեցկության կարևոր չափանիշներ են:

Հստակությունը կարևորագույն հատկանիշ է, որով պետք է օժտված լինեն բոլոր թեորեմները: Թեորեմի պայմանները և եզրակացությունը պետք է ձևակերպված լինեն հստակ, գերծ երկիմաստ ընկալումներից, հուզական, զգացմունքային երանգավորումներից և խոսքի արտահայտման գեղարվեստական այլ հնարքներից: Այն ենթադրում է նաև թեորեմի ապացուցելիություն. նրա պայմանները պետք է բավարար լինեն եզրակացությունը արտաձեղու համար: Միաժամանակ նրանում չպետք է լինեն ավելորդ պայմաններ. պայմաններ, որոնք չեն օգտագործվում թեորեմի ապացուցման ընթացքում կամ էլ բխում են մյուս պայմաններից:

Պարզությունը նպաստում է մաթեմատիկայի ընդհանուր ճարտարապետական կառույցի մեջ թեորեմի ներդաշնակ ներառմանը: Միաժամանակ պարզությունը թեորեմի ուսուցման հաջողության կարևոր պայման է. առանց դրա անհնար է ապահովել թեորեմի ընկալումը: Թեորեմի պարզությունը, առաջին հերթին, արտահայտվում է նրա ձևակերպման մեջ: Երկար-բարակ, խրթին ձևակերպումները լուրջ խոչընդոտ են նրա ուսուցման ճանապարհին: Թեորեմի ձևակերպման պարզությունը պայմանավորված է մաթեմատիկական լեզվի ճիշտ օգտագործումով: Բանաձևի, թեորեմի մեջ սիմվոլների մեծ քանակությունը կարող է նրա էության ըմբռնման արգելք հանդիսանալ: Տառային նշանակումները կարող են ն' օգնել, և՛ խանգարել ձևակերպման պարզությանը: Օրինակ, Պյութագորասի թեորեմի ձևակերպումը կարելի է կատարել հետևյալ եղանակներով.

- Եթե ABC ուղղանկյուն եռանկյան մեջ $\angle A$ -ն ուղիղ է, ապա $AB^2 + AC^2 = BC^2$;
- a , b էջեր և c ներքնաձիգ ունեցող ուղղանկյուն եռանկյան համար $a^2 + b^2 = c^2$;
- Ուղղանկյուն եռանկյան էջերի քառակուսիների գումարը հավասար է ներքնաձիգի քառակուսուն:

Այս ձևակերպումներից երկրորդում մաթեմատիկական սիմվոլների քանակությունը ավելի քիչ է, քան առաջինում: Այդ պատճառով այն ավելի պարզ տեսք ունի: Իսկ երրորդում ընդհանրապես մաթեմատիկական սիմվոլներ չկան, և այն պարզության տեսակետից կատարյալ է:

Դիտարկենք հաջորդ օրինակը՝ սինուսների թեորեմը: Այն կարող ենք ձևակերպել հետևյալ եղանակներով.

- ABC եռանկյան համար $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A}$;
- a , b , c կողմերով և նրանց դիմաց համապատասխանաբար ընկած α , β , γ անկյուններով եռանկյան համար $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$;
- Եռանկյան կողմերը իրար հարաբերվում են այնպես, ինչպես նրանց դիմացի անկյունների սինուսները:

Այստեղ թեև առաջին ձևակերպումն ավելի կարճ է, քան երկրորդը, սակայն նրանում հիմնական բանաձևի ընկալումը լրացուցիչ ջանքեր է պահանջում՝ կապված կողմերի և նրանց դիմաց ընկած անկյունների գրառման ու պատկերացման հետ, ինչը ներառված է երկրորդ ձևակերպման մեջ: Երկրորդում հաջող են ընտրված նաև եռանկյան կողմերի և

անկյունների նշանակումները. դրանց համար լատինական և հունական այբուբենների առաջին երեք տառերի միջև առկա համաչափությունը արտաքին գեղագիտականի դրսևորում է և գեղեցիկի լրացուցիչ երանգ է հաղորդում բանաձևին: Այդ պատճառով երկրորդ ձևակերպումը ավելի պարզ է: Երրորդ ձևակերպումը թեև ընդհանրապես տառեր չի պարունակում և ունի համաչափության որոշակի երանգավորում, սակայն նրա ընկալման համար սովորողը, հավանաբար, պետք է կատարի լրացուցիչ գծագիր և նշանակումներ:

Հարկ է նշել, որ երկրաչափության դպրոցական դասընթացում հատվածի նշանակումը նրա ծայրակետերի միջոցով, եռանկյան (նաև՝ բազմանկյան) նշանակումը նրա գագաթների միջոցով և դրանց հետագա օգտագործումը եռանկյան այլ տարրերի նշանակման համար, թեև հստակության կարևոր ցուցանիշ են, բայց մաթեմատիկական թեորեմին, նրա ապացույցին և մաթեմատիկական տեքստին ընդհանրապես հաղորդում են անհրապույր տեսք, դժվարացնում են համապատասխան երկրաչափական նյութերի ընթերցումը, ինչը արդյունք է մաթեմատիկական սիմվոլների անհարկի շատ օգտագործման, որի պատճառով խախտվում է մաթեմատիկական գեղեցիկի պարզության հատկանիշը:

Մաթեմատիկական թեորեմների գեղագիտական գրավչությունն արտահայտվում է նաև մաթեմատիկական գեղեցիկի բազմազանությունների միասնության և ընդհանրականության օբյեկտիվ հատկանիշներով: Բազմազանությունների միասնության հատկանիշով, օրինակ, բոլոր ուղղանկյուն եռանկյունները միավորվում են «որևէ երկու կողմերի քառակուսիների գումարը հավասար է երրորդի քառակուսուն» հատկությամբ, բոլոր եռանկյունները՝ փոխած անկյանը հավասար ներքին անկյունների գումար ունենալու հատկությամբ, երեքի վրա բաժանվող բնական թվերը՝ երեքի բաժանվող թվանշանների գումար ունենալու հատկությամբ և այլն: Մյուս կողմից, «երեքի վրա բաժանվող թվանշանների գումար ունեցող բնական թիվը բաժանվում է երեքի» հատկությունը կարելի է կիրառել ցանկացած բնական թվի համար, ինչը ցույց է տալիս այդ թեորեմի ընդհանրականությունը:

Մաթեմատիկայում կա թեորեմների մի տեսակ, որոնցում դրսևորվում է գեղեցիկի համաչափության հատկանիշը: Դրանք արտահայտվում են այսպիսի համարժեքության տեսքով. A և B դատողությունները համարժեք են: Մաթեմատիկայում նման համարժեքությունները սովորաբար ձևակերպվում են «A, այն և միայն այն դեպքում, եթե B» կամ «A-ն B-ի

անհրաժեշտ և բավարար պայմանն է» ձևերով: Նախորդ պարբերության մեջ բերված բոլոր թեորեմները այդպիսին են, ինչը դրանց տալիս է լրացուցիչ գեղագիական գրավչություն. A և B դատողությունները կարծես թե «հավասարակշռվում» են. Դրանք, փոխարինելով մեկը մյուսով, նորից կստանանք տրվածին համարժեք թեորեմ: Այդ գրավչությունը սովորողը կզգա, եթե ուսուցիչն ուշադրություն դարձնի դրա վրա: Պետք է նկատի ունենալ, որ նման թեորեմները թույլ են տալիս այլ դեպքերում նրանում առկա պայմանն ու եզրակացությունը փոխարինել մեկը մյուսով: Օրինակ, հավասարասրուն եռանկյան համար մենք հավասարապես օտագործում ենք նրա երկու կողմերի կամ երկու անկյունների հավասարությունը: Եվ նման փոխարինումը օրինական է, որովհետև իրավացի է հետևյալ համարժեքությունը. եռանկյունը հավասարասրուն է (այսինքն՝ նրա սրտունքները հավասար են) այն և միայն այն դեպքում, եթե հիմքին առընթեր անկյունները հավասար են: Նույն կերպ, օգտվելով Պյութագորասի թեորեմից, 3, 4, 5 կողմերով եռանկյան միջոցով որմնադիրները, ատաղձագործները և այլ արհեստավորներ հաճախ կառուցում են ուղիղ անկյուն:

Վերջին ձեռնարկման գրավչությունը բխում է նաև նրանում մաթեմատիկական գեղեցիկի ընդհանրականության և կիրառելիության հատկանիշների առկայությունից: Իսկ պարբերական ֆունկցիաների ուսումնասիրության ընթացքում դրսևորվում է ռիթմի գեղագիտական հատկանիշը, ածանցյալի մասնակցությամբ առանձին թեորեմներում՝ օպտիմալության հատկանիշը, դիֆերենցիալ հավասարումների մասնակցությամբ թեորեմներում՝ կայունության հատկանիշը և այլն:

2. Թեորեմների ուսուցման գեղագիտական գրավչության սուբյեկտիվ հատկանիշները

Թեորեմի գեղագիտական գրավչությունը մեծապես պայմանավորված է նրա ուսուցման կազմակերպումից, որի ընթացքում դրսևորվում են նաև մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշները:

Այստեղ, առաջին հերթին, պետք է նկատի ունենալ, որ յուրաքանչյուր մաթեմատիկական թեորեմ ոչ ակնհայտ ճշմարտություն է, և նրա իմացությունը արդեն մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշ է: Հասկանալի է, որ թեորեմի բերած այդ ճշմարտությունը, կախված ուսուցչի մոտեցում-

ներից, կարող է աննկատ մնալ սովորողի համար կամ էլ դառնալ նշանակալից: Վերջինիս հասնելու համար ուսուցիչը պետք է նախապատրաստի թեորեմի մուտքը, համապատասխան հարցադրումների միջոցով ինքը կամ աշակերտների ուժերով առաջ քաշի վարկածներ, որոնցում դրսևորվեն գիտական գեղեցիկի անկանխատեսելիության ու անսպասելիության սուբյեկտիվ հատկանիշները: Սովորաբար գեղագիտական տարրը առավելագույնս դրսևորվում է, երբ սովորողն ինքն է գտնում կամ հայտնագործում թեորեմը: Նման հայտնագործումը հնարավոր է իրագործել ինչպես էվրիստիկական, այնպես էլ էմպիրիկ ճանապարհով:

Ուսուցման ընթացքում որոնման էվրիստիկական մեթոդը կապված է թեորեմի և նրա ապացուցման ներկայացման հերթականության հետ: Սովորաբար մաթեմատիկայի հանրակրթական դասընթացներում և ուսուցման գործընթացում նախ ներկայացվում է թեորեմը, ապա կատարվում դրա ապացուցումը: Ներկայացման այս ընթացքը չի համապատասխանում թեորեմի ստացման, հայտնագործման բնական ընթացքին: Այստեղ մաթեմատիկոսը սկզբում ունի վարկած, որի հաստատման դեպքում նա կատարում է թեորեմի ձևակերպումը, ինչից հետո այդ հաստատումը ներկայացնում է որպես թեորեմի ապացուցում: Այսինքն մաթեմատիկական գործունեությունը այստեղ իրակիանացվում է նախ ապացուցումը, հետո թեորեմի ձևակերպումը հերթականությամբ: Իրերի այս բնական ընթացքը, ինչպես նշվեց վերևում, խախտվում է մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում և նրա ուսուցման գործընթացում, որտեղ նախ ձևակերպվում է պատրաստի թեորեմը, ապա տրվում է նրա ապացույցը: Բսկ գեղեցիկի ինտելեկտուալ որոնման սուբյեկտիվ հատկանիշը, նրանից բխող հուզական տարրը լավագույնս կարող է դրսևորվել, եթե թեորեմը ներկայացվի որպես էվրիստիկական որոնման արդյունք՝ հայտնագործություն:

Օրինակ, միջին թվաբանականի և միջին երկրաչափականի կապի մասին թեորեմը կարելի և տալ պատրաստի վիճակում և անցնել նրա ապացուցմանը, որտեղ, բնականաբար, սովորողի ստեղծագործական հնարավորությունները աննշան են: Մինչդեռ կարելի է մի քանի օրինակների դիտարկմամբ կատարել համապատասխան դատողություններ, առաջադրել վարկածը, և դրանց արդյունքում ստանալ այդ թեորեմը: Նման դատողությունները, ուսուցչի ոչ ակտիվ միջամտությամբ, կարող է անել նաև աշակերտը: Այդ դեպքում աշակերտը անմիջականորեն մասնակցում

է թեորեմի հայտնագործմանը, ինչը և մեծացնում է ուսուցման գործընթացի թե՛ ստեղծագործական, թե՛ գեղագիտական տարրը:

Թեորեմի էմպիրիկ ուսուցումը նույնպես թույլ է տալիս ստեղծագործական մոտեցում: Այստեղ կարելի է դիտարկել զանազան փորձնական օրինակներ, որոնք էլ կարող են հանգեցնել թեորեմին և նրա ձևակերպմանը: Օրինակ, սինուսների թեորեմի էմպիրիկ եղանակով ուսուցումը կարելի է կատարել հետևյալ կերպ: Նախ հիշենք, որ եռանկյան մեջ մեծ անկյան դիմաց ընկած է մեծ կողմը, և կատարենք հետևյալ հարցադրումը. «Կա՞ այստեղ ինչ-որ օրինաչափություն»: Առաջին «պատասխանը», որ կառաջարկի մեր ինտուիցիան, ուղիղ համեմատականությունն է. քանի անգամ մեծ է մի անկյունը մյուսից, այնքան անգամ էլ մեծ է նրա դիմացի կողմը մյուսի դիմացի կողմից: Բայց 30 աստիճանի սուր անկյունով ուղղանկյուն եռանկյան դիտարկումը հերքում է այս վարկածը, քանի որ 30 աստիճանի անկյունը փոքր է 90 աստիճանի անկյունից երեք անգամ, իսկ 30 աստիճանի անկյան դիմացի կողմը հավասար է ներքնաձիգի, այսինքն՝ 90 աստիճանի անկյան դիմացի կողմի կեսին: Այս դիտարկումից հետո աշակերտների մեծ մասը կկարծի, որ նշված հարցում չկա որևէ օրինաչափություն: Բայց այստեղ կարելի է անել ևս մեկ դիտարկում. 30 աստիճանի անկյան սինուսը հավասար է $1/2$ -ի, իսկ 90 աստիճանի անկյան սինուսը՝ 1-ի: Այս դիտարկումը ստեղծում է նոր վարկածի հնարավորություն. իսկ միգուցե եռանկյան կողմերի հարաբերությունը նույնն է, ինչ նրանց դիմացի անկյունների սինուսների՞ հարաբերությունը (ինչպես դիտարկված օրինակում): Եթե աշակերտների մոտ նման վարկած դեռևս չի ձևավորվել, ապա կարելի է այստեղ դիտարկել ևս մեկ դեպք. նույն եռանկյան մեջ 60 և 30 աստիճանի անկյունների և՛ սինուսների, և՛ դիմացի կողմերի հարաբերությունը հավասար է $\sqrt{2}$ -ի: Այս նոր դիտարկումը արդեն բավարար է համապատասխան վարկածի ձևավորման համար: Այժմ արդեն կարելի է կամ ձևակերպել սինուսների թեորեմը և անցնել դրա ապացուցմանը, կամ էլ շարունակել էմպիրիկական մոտեցումը և ավելի մոտենալ սինուսների թեորեմի հայտնաբերմանը: Բոլոր այս դիտարկումները կարելի է իրականացնել աշակերտների ուժերով, ինչը ուսուցման գործընթացին կհաղորդի ստեղծագործական բնույթ և էապես կավելացնի նրանում գեղագիտական տարրը: Նշենք, որ էմպիրիկական ճանապարհով թեորեմի ստացման դեպքում լիովին կորսնորվի նաև գիտական գեղեցիկի անսպասելիության սուբյեկտիվ հատկանիշը, ինչը կավելացնի թեորեմի գեղագիտական գրավչությունը:

Բնականաբար, նշված գործընթացների իրականացումը աշակերտից կպահանջի որոշակի ջանքերի ներդրում թեորեմի էությունը հասկանալու, նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարման համար, իսկ վերջնարդյունքին հասնելը կավելացնի սովորողի լավատեսությունը, հանգամանքներ, որոնք նաև մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշներ են և ավելացնում են թեորեմի գեղագիտական գրավչությունը:

3. Թեորեմների գեղագիտական գրավչության ներքին և արտաքին դրսևորումները

Գիտական գեղեցիկի հստակության, պարզության, ինքնատիպության և այլ օբյեկտիվ հատկանիշներ կարող են հանդես գալ նաև որպես թեորեմի գեղագիտական գրավչության արտաքին հատկանիշներ, իսկ բազմազանությունների միասնության, ընդհանրականության, բարդը պարզին հանգեցնելու, կայունության, կիրառելիության, օպտիմալության օբյեկտիվ հատկանիշները արտահայտում են թեորեմի գեղագիտության ներքին ներուժը: Կարգը, համաչափությունը, համեմատությունը, ներդաշնակությունը, ռիթմը և գիտական գեղեցիկի այլ օբյեկտիվ հատկանիշներ կարող են արտահայտել թեորեմի ինչպես ներքին, այնպես էլ արտաքին գրավչությունը, որոնք պայմանավորված են նաև մեկը մյուսով: Միևնույն ժամանակ, յուրաքանչյուր թեորեմ ունի գեղեցիկի ներքին և արտաքին դրսևորումների իր յուրահատկությունները: Դիտարկենք խնդիրը մեկ օրինակի վրա:

Հանրահայտ է, որ յուրաքանչյուր եռանկյանը կարելի է ինչպես ներգծել, այնպես էլ արտագծել շրջանագիծ: Այս փաստը որոշ ընդհանրություն է հաղորդում այդ երկու գաղափարներին: Իսկ կա՞րողյոք նման ընդհանրություն շրջանագծի և քառանկյան միջև:

Առաջին գլխում, մենք դիտարկեցինք մաթեմատիկական թեորեմի արտաքին և ներքին գեղագիտությունը քառանկյանը շրջանագիծ ներգծելու օրինակի վրա: Նույն հաջողությամբ կարելի է դիտարկել նաև քառանկյանը շրջանագիծ արտագծելու վերաբերյալ թեորեմը: Սակայն կանգ առնենք թվաբանական և հանրահաշվական օրինակների վրա, որոնք առաջին հայացքից աչքի չեն ընկնում իրենց գոնե արտաքին գրավչությամբ:

Պարզագույն թվաբանական թեորեմները առաջին հայացքից աչքի չեն ընկնում գեղեցիկի արտաքին դրսևորումներով: Սակայն դժվար է պատկերացնել ավելի գեղեցիկ արտաքին տեսք ունեցող թեորեմ, քան, օրինակ, գումարման տեղափոխական հատկությունն է. գումարելիների տեղափոխումից գումարը չի փոխվում: Այստեղ կա և՛ հատկություն, և՛ պարզություն, համաչափություն, կիրառելիություն, օպտիմալություն, բազմազանությունների միասնականություն ու ընդհանրականություն: Հետաքրքիրն ու գեղեցիկը այն է, որ համանման թեորեմ տեղի ունի նաև թվերի բազմապատկման գործողության համար: Իսկ այդ երկու թեորեմների համատեղ դիտարկումը բացահայտում է գեղագիտական գրավչության նոր երանգներ՝ ի դեմս համաչափության և բազմազանությունների նոր միասնության: Այս երկու թեորեմները, շնորհիվ իրենց լայն ու ամենօրյա կիրառության, դարձել են մեր մտածողության մի սովորական մասնիկը, ինչի պատճառով էլ մեր կողմից չի նկատվում դրանց արտաքին գեղեցկությունը: Նույնը կարելի է ասել նաև գումարման ու բազմապատկման գործողությունների զուգորդական հատկությունների, գումարի նկատմամբ արտադրյալի բաշխականության և այդ գործողությունների այլ հատկությունների մասին:

Իսկ ինչպիսի՞ն է նշված թեորեմների կամ հատկությունների ներքին գեղագիտությունը: Ընդհանրապես, թվի գաղափարի ձևավորումը մաթեմատիկայի ընդհանուր ճարտարապետության և նրա հանրակրթական դասընթացի կառուցման ամենագրավիչ պահերից է: Այստեղ կառույցի հիմքում դրվում են բնական թվերը, որոնք, ըստ Կրոնեկերի, մեզ տվել է Աստված, և որոնց հենքի վրա էլ մաթեմատիկական հրաշալի գաղափարների ներգրավման միջոցով կառուցվում են մնացած՝ ամբողջ, ռացիոնալ, իրական և կոմպլեքս թվային համակարգերը: Հետաքրքիրն այն է, որ բոլոր այդ կառույցներում գումարման և բազմապատկման գործողությունները դարձյալ օժտված են տեղափոխական, զուգորդական և այլ հատկություններով: Այդ հատկությունների կամ թեորեմների հիմքում էլ ընկած է թվի գաղափարի ներքին գեղագիտությունը:

Սակայն պետք է խոստովանել, որ մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում միայն մոտավոր պատկերացում է տրվում գիտական գեղեցիկի այս հոյակապ դրսևորման մասին:

Ավելի բարդ է խնդիրը հանրահաշվի պարագայում. մաթեմատիկայի հանրակրթական դասընթացը հնարավորություն չի տալիս գոնե գաղափար կազմելու հանրահաշվի, նրա մեթոդների ու թեորեմների գեղագիտական հմայքի

մասին: Իսկ նշված դասընթացում առկա հանրահաշվական նյութը, ըստ էության, ստացվում է թվային համակարգերի հատկությունների անմիջական տառային գրառումների արդյունքում և գեղագիտական տեսակետից շատ բան չի ավելացնում մաթեմատիկայի թվային հիմքերին:

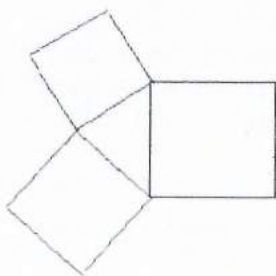
4. Թեորեմների գեղագիտական գրավչությունը և դրանց ուսուցման մոտիվացիան

Թեև թեորեմների ուսուցման ընթացքում դրսևորվում են մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշների մեծ մասը, ներքին և արտաքին գեղագիտական ձևն ու բովանդակությունը, այնուամենայնիվ, դրանք բավարար չեն ընկալման դժվարությունները լիովին հաղթահարելու համար, և թեորեմների ուսուցումը պահանջում է համապատասխան մոտիվացիա. ինչո՞ւ է անհրաժեշտ այս կամ այն թեորեմի իմացությունը: Եվ մոտիվացիան ավելի ուժեղ է լինում, եթե այն իր մեջ ներառում է գեղագիտական գրավչություն: Իսկ թեորեմների ուսուցման գործընթացին կարելի է անցնել համապատասխան մոտիվացիայից հետո: Ասվածը ցուցադրենք մեկ օրինակի վրա:

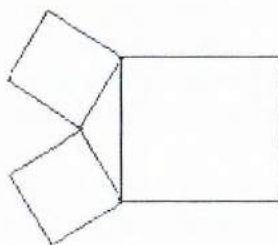
Իմ աշխատանքային գործունեության սկզբում Պյութագորասի թեորեմն անցնելիս ես իմ ուսուցիչ հարգելի Վահրամի՝ աշակերտներին հողամաս տանելու հնարավորությունները չունեի և թեորեմի հանդեպ հետաքրքրությունը առաջացնում էի դասարանում: Սկզբում առաջադրում էի հետևյալ խնդիրը:

Հայրը ուներ երկու որդի, որոնց պետք է կտակեր իր ունեցած երեք քառակուսաձև հողամասերը: Այդ հողամասերի համար որպես կողմ էին ծառայում տրված եռանկյան մեկական կողմերը (տես ա գծագիրը): Ինչպե՞ս վարվեր հայրը, եթե չէր ուզում կիսել հողամասերը:

Հասկանալի է, որ հայրը պետք է հողամասերից երկուսը (փոքրերը) կտակեր տղաներից մեկին, իսկ մեկը (մեծը) կտակեր մյուսին: Բայց ինչպե՞ս են համեմատվում նման հողամասերը իրար հետ: Իմ այս հարցադրմանը հետևում էին զանազան պատասխաններ, որոնք հիմնականում հենվում էին ա գծագրից ստացված տպավորության վրա. երկու հողամասերը ժառանգությունն ստացող տղան շահում է: Այդ ժամանակ ես գծում էի նաև բ գծագիրը, որից երևում է, որ շահում է մեկ՝ մեծ հողամասը ժառանգող տղան:



գծ. ա

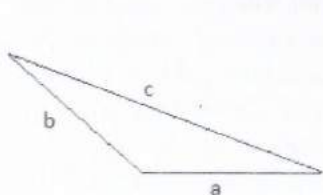


գծ. բ

Որոշ քննարկումներից հետո ես ավելացնում էի նաև մեկ այլ հարցադրում. իսկ կարելի՞ է ստանալ այնպիսի եռանկյուն, որ տղաներից ոչ մեկը մյուսի նկատմամբ առավելություն չունենա: Խնդրի լուծումը առայժմ հետաձգելով՝ ես իմ աշակերտների ուշադրությունը հրավիրում էի երկու հանգամանքի վրա: Նախ, ա գծագրում, որտեղ պատկերված եռանկյունը սուրանկյուն է, մեծ անկյունը ավելի մեծացնելով՝ մեծացնում էի նրա դիմացի կողմը և, հետևաբար, այդ կողմի վրա հենված քառակուսին, ապա և բ գծագրում բութանկյունը փոքրացնելով՝ փոքրացնում էի նրա դիմացի կողմի վրա հենված քառակուսին: Բնական կլինե՞ր մտածել, որ կգա մի պահ, երբ եռանկյունները կընդունեն այնպիսի դիրք, որ նրանց երկու փոքր կողմերի վրա կառուցած քառակուսիների մակերեսների գումարները համապատասխանաբար հավասար կլինեն մեծ կողմի վրա կառուցած քառակուսու մակերեսին: Եվ այստեղ առաջանում էր երկու հարց. առաջին՝ անհրաժեշտ էր հիմնավորել ասվածը, երկրորդ՝ ե՞րբ տեղի կունենար այդ հավասարությունը: Իհարկե, եթե մենք գտնեինք երկրորդ հարցի պատասխանը, ապա առաջին հարցադրումը ինքնըստինքյան վերանում էր:

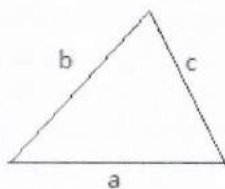
Այստեղ ես առաջարկում էի մի կողմ թողնել առաջադրված խնդիրը և անցնում էի Պյութագորասի թեորեմի ուսուցմանը: Իսկ ուսուցանվող $a^2 + b^2 = c^2$ բանաձևը միշտ չէ, որ հուշում է նախորդ խնդրում առաջադրված հարցի պատասխանը: Համենայն դեպս, դասավանդման իմ պրակտիկայում այն գտնելու դեպք չի հանդիպել: Ավելին, թեորեմի թողած տպավորությունը այնքան մեծ է լինում, որ աշակերտները մոռանում են դասի սկզբում առաջադրված խնդիրը: Եվ ուսուցիչը ստիպված է լինում հիշեցնել հոր կտակի պատմությունը: Միայն այդքանը: Մնացածը արդեն պետք է թողնել աշակերտներին: Եվ հիմնականում նրանց ուժերով էլ կարելի է պար-

զաբանել և ստանալ հետևյալ երեք բանաձևերը համապատասխանաբար սուրանկյուն, ուղղանկյուն և բութանկյուն եռանկյունների համար.



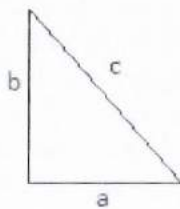
$$a^2 + b^2 > c^2$$

սուրանկյուն եռանկյուն



$$a^2 + b^2 = c^2$$

ուղղանկյուն եռանկյուն



$$a^2 + b^2 < c^2$$

բութանկյուն եռանկյուն

Արդեն հոգնած ու բավարարված աշակերտներին լիցքաթափելու համար ես քննարկում էի այն հարցը, թե արդյո՞ք հայրը գիտեր Պյութագորասի թեորեմը, ինչը, իհարկե, քիչ կապ ուներ դասի թեմայի հետ և այլ նպատակ էր հետապնդում:

Նման ձևով դասի կազմակերպումը իր մեջ պարունակում է ինչպես մոտիվացիայի գրավչության, այնպես էլ հետաքրքրության, զարմանքի, անկանխատեսելիության, անսպասելիության, պարզության գեղագիտական տարրեր, առաջացնում համապատասխան հուզական վիճակներ:

5. Թեորեմների գեղագիտական գրավչության արտահայտումը դրանց կիրառության միջոցով

Մենք դիտարկեցինք մաթեմատիկական կիրառական ոլորտում թեորեմի օգտագործման օրինակ, ինչը ծառայում է որպես ուսուցման մոտիվացիայի միջոց և մեծացնում թեորեմի գեղագիտական գրավչությունը: Սակայն թեորեմի գեղագիտական գրավչությունը արտահայտվում է նաև բուն մաթեմատիկայում դրա կիրառության միջոցով: Դիտարկենք նման երկու օրինակ:

Իսկապես, քառանկյան շրջանագծին ներգծելի լինելու հարցը պարզաբանելիս մենք կիրառում ենք գազաթը շրջանագծից դուրս, շրջանագծի ներսում և շրջանագծի վրա գտնվող անկյունների չափման վերաբերյալ թեորեմները: Համանման ձևով՝ շրջանագծին արտագծելի լինելու քառանկյան հատկությունը քննարկելիս անսպասելիորեն այդ թեորեմներին

փոխարեն օգտագործվում է տրված կետից շրջանագծին տարված շոշափող հատվածների հավասարության մասին թեորեմը:

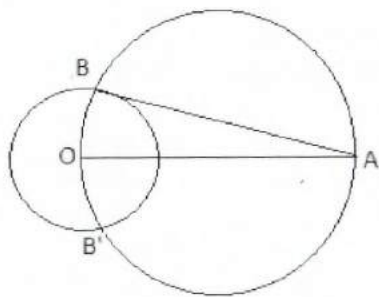
Երկու դեպքում էլ թեորեմի հիմնական գեղագիտական տարրը նրա կիրառելիությունն է, իսկ անսպասելիությունը ավելացնում է այդ տարրը:

Ավելի մեծ է թեորեմների կիրառությունը ապացուցումների կառուցման մեջ: Եթե հիշենք ապացուցման հիլբերդյան սահմանումը, ապա պարզ կդառնա, որ առանց թեորեմների կիրառության դրանք կարող են շատ ծավալուն տեսք ընդունել և կորցնել իրենց գրավչությունը: Ահա թեորեմները փոխարինում են ապացուցման առանձին հատվածների, հեշտացնում ապացուցման ընկալումը, և դրանով այն դարձնում գրավիչ:

Թեորեմները կիրառվում են նաև խնդիրների լուծման մեջ. առանց թեորեմների կիրառության դժվար է լուծել շատ թե քիչ դժվար որևէ խնդիր: Դիտարկենք մեկ օրինակ:

Ինչպե՞ս կարող ենք կարկինի և քանոնի օգնությամբ շրջանագծի հարթության մեջ և շրջանագծից դուրս գտնվող կետից այդ շրջանագծին տանել շոշափող:

Ենթադրենք տարել ենք նման շոշափող: Հետևելով գծագրում ընդունված նշանակումներին՝ կարող ենք նկատել, որ OBA անկյունը ուղիղ է, քանի որ OB շառավիղը ուղղահայաց է BA շոշափողին: Հետևաբար, շոշափման B կետը գտնելու համար մեզ անհրաժեշտ է գտնել տրված շրջանագծի այն կետը կամ կետերը, որոնցից OA հատվածը երևում է



ուղիղ անկյան տակ: Բայց այդ կետերի բազմությունը OA տրամագծով շրջանագծի բոլոր կետերն են, բացառությամբ O և A կետերի: Ուրեմն, մեզ մնում է տանել OA տրամագծով շրջանագիծը, որի հատման B կետը (ինչպես նաև B' կետը) կլինի A կետից տրված շրջանագծին տարված շոշափողի շոշափման կետը: Մնում է A կետը միացնել B կետին (նաև B' կետին):

Այստեղ գեղագիտական տարրը արտահայտվում է շրջանագծի շառավղի և նրա ծայրակետում տարված շոշափողի ուղղահայացության և շրջանագծի տրամագծի վրա հենված ներգծյալ անկյան ուղիղ լինելու մասին թեորեմների կիրառության անսպասելիության և, հավանաբար, նաև անկանխատեսելիության գիտական գեղեցիկի հատկանիշներով:

§4. ԳԵՂԵՑԻԿԻ ՁԵՎԱՎՈՐՈՒՄԸ ԱՊԱՑՈՒՑՈՒՄՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑՈՒՄ

Սկսած հույներից «մաթեմատիկա» ասելով հասկանում ենք «ապացուցում»:

Ն. Բուրբակի

Ապացուցումը կոչվում է խիստ, եթե այդպես է համարում մաթեմատիկոսների մեծամասնությունը:

Մորիս Զլայն

Եթե մենք կարդում ենք մի գիրք, որ գրված է հիսուն տարի առաջ, ապա նրանում արված դատողությունները մեծ մասամբ տրամաբանական խստությունից զուրկ են թվում:

Անրի Պուանկարե

1. Մաթեմատիկան որպես ապացուցումների արվեստ

Ապացուցման և, հատկապես, նրա ամենանշանակալից ձևի՝ տրամաբանական ապացուցման գաղափարի ու նրա մաթեմատիկական ձևի առաջացումն ու զարգացումը գիտության պատմության ուշագրավ էջերից են: Այդ գրավչությունը սկսվում է Անտիկ Հունաստանի փիլիսոփաների սոփեստություններում ու Ջենոնի անտինոմներում և շարունակվում հետագա ժամանակներում՝ իր լավագույն արտահայտությունը գտնելով գիտական խոշորագույն հայտնագործություններում՝ լինի դա Լոբաչևսկու-Պոյայի երկրաչափության, թե բազմությունների տեսության հակասությունների հաղթահարման համար մաթեմատիկական տրամաբանության ստեղծումը: Եվ մաթեմատիկական բոլոր խոշոր հայտնագործությունների “աղը”, գրավչությունը դրանց հիմքում ընկած ապացուցումների անսպասելիությունն է ու անկանխատեսելիությունը, դժվարությունն ու միաժամանակ՝ պարզությունը, հստակությունը և տրամաբանական խստությունը. հատկանիշներ, որոնցով բնութագրվում է գեղեցիկը գիտության մեջ: Եվ պատահական չէ, որ մաթեմատիկական լավագույն ապացուցումներին տրվող հիմնական գնահատականը գեղեցիկն է՝ գեղեցիկ ապացույցը:

Զարմանքը, հետաքրքրությունը, հիացմունքը, հաճույքը, այլ հույզեր և զգացմունքներ փաստարկված խոսքի, նաև՝ մաթեմատիկական ապացուցման մշտական ուղեկիցները կարող են լինել, եթե սովորողի խոսքի գեղեցկությունը ուսուցման նպատակ է դառնում: Իսկապես, մի՞թե զարմանք չի հարուցում հետևյալ սովետությունը (տես [10] դասագրքի N560 խնդիրը: Սովետության բնօրինակում ձիու փոխարեն օգտագործվում է կոտոշը):

Այն, ինչ դու չես կորցրել՝ ունես: Դու ձի չես կորցրել: Ուրեմն՝ դու ձի ունես:

Չկա աշակերտ, որ անտարբեր լինի այս սովետության նկատմամբ և չկա աշակերտ, որ չուզի ինքնուրույն, կրկնում եմ՝ ինքնուրույն գտնել դրա լուծումը: Ի՞նչն է ձգում աշակերտին. պարզությո՞ւնը, անսպասելիությո՞ւնը, սխալի քողարկման խորամանկությո՞ւնը: Բոլոր դեպքերում ձգողական այդ ուժը խնդրի մեջ գեղեցիկի առկայության աներկբա հատկանիշ է ու ապացույց:

Իսկ նրա լուծո՞ւմը: Ահա այն. սխալ է առաջին՝ «Այն, ինչ դու չես կորցրել՝ ունես» դատողությունը: (Նպատակահարմար է այստեղ բերել այդ սխալի դրսևորման կոնկրետ օրինակներ:) Եվ որովհետև դու քո չունեցած որևէ բան չես կորցնում, բնականաբար այն չունես: Այնինչ՝ նշված դատողությամբ պնդվում է հակառակը: Խնդրի մասին ասվածը կարելի է կրկնել նաև նրա ապացուցման նկատմամբ, և որպես գեղագիտական հույզերի ու զգացմունքների լրացուցիչ դրսևորում կարելի է ավելացնել սովորողի բավարարվածությունը և հաճույքը:

Հիմա դիմենք Ջենոնին: Հանրակրթական դպրոցի հանրահաշվի 9-րդ դասարանի [11] դասագրքում անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիայի գումարը հաշվելուց առաջ դիտարկվում է նրա «Արագավազ Աքիլեսի և կրիայի մասին» ապօրինան: Ջենոնը «ապացուցում» է, որ Աքիլեսը, ով հունական դիցաբանության մեջ հայտնի էր իր արագավազությամբ, չի կարող հասնել կրիային՝ աշխարհի ամենադանդաղաշարժ կենդանիներից մեկին: Սովորողների առաջին ռեակցիան թերահավատությունն է: Բայց երբ ուսուցիչը կրկնում է խնդիրը և ասում, որ Ջենոնի պես իմաստուն մարդը դրանում համոզել է շատ այլ իմաստունների և, անշուշտ, կհամոզի նաև իրենց, աշակերտները սկսում են հետաքրքրվել խնդրով և պատրաստվում են հերքել իրենց ներկայացվող փաստարկումը կամ ապացուցումը: Իսկ այդ ապացուցումը, որ ներկայացնում է ուսուցիչը, հետևյալն է:

Տրված է, որ Աքիլեսը տասն անգամ ավելի արագ է վագում կրիայից և սկզբում նրանից հետ է մնում հազար քայլով: Այն ժամանկահատվածում, երբ Աքիլեսը անցնի այդ հետավորությունը, կրիան նույն ուղղությամբ կանցնի հարյուր քայլ: Երբ Աքիլեսը անցնի այդ հարյուր քայլը, կրիան կանցնի ևս տասը քայլ, և այդպես շարունակ: Այս ընթացքը անվերջ կշարունակվի: Եվ Աքիլեսը այդպես էլ չի հասնի կրիային:

Այս «ապացուցումը», իհարկե, աշակերտները չեն կարողանում հերքել: Բայց այն հարուցում է զարմանք ու տարակուսանք: Նրանց՝ հետաքրքրասիրությամբ վառվող աչքերը ուղղվում են ուսուցչին: Իսկ ուսուցիչը, որ ևս եմ, բավարարված եմ իմ արած աշխատանքով. ես ստացել եմ այն, ինչ ուզում էի: Ես նրանց ասում եմ, որ, ճիշտ է, ժամանակի իմաստունները չեն կարողացել առարկել, հերքել Զենոնին, բայց գիտությունը զարգացել է ու այդ ընթացքում կատարել այնպիսի հայտնագործություններ, որոնք թույլ են տալիս իրականացնել պահանջվող հերքումը: Այժմ մենք ծանոթանալու ենք նման մի հայտնագործության: Ապահովված է նաև աշակերտների հետաքրքրասիրությունը նոր նյութի նկատմամբ, և ես անցնում եմ դրա հաղորդմանը. «Անվերջ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիան և նրա գումարը» ...

Կարելի է աշակերտների հետ քննարկել նաև Լոբաչևսկու երկրաչափության և բազմությունների տեսության պարադոքսների հետ կապված նյութեր, սակայն դրանք արդեն արտադասարանական աշխատանքի, մաթեմատիկական խմբակի պարապմունքների հարցեր են:

2. Ի՞նչ է ապացուցումը

Հավանաբար, ճիշտ կլինի սկզբում պարզել, թե ինչու է կատարվում ապացուցումը: Այն կոչված է պատասխանելու ճանաչողության հիմնական «ինչո՞ւ» հարցադրմանը: Վերջինս առաջադրվել է մարդկության պատմության վաղնջական ժամանակներից, բայց բոլոր զարգացում է ստացել միայն Անտիկ Հունաստանում՝ հասարակական կյանքի կազմակերպման յուրահատուկ պայմաններում: Հունական պոլիսների կառավարման ժողովրդավարական ձևը ենթադրում էր առաջադրվող հարցերի հրապարակային քննարկում, որտեղ հարցեր ներկայացնողին՝ բանախոսին, ճարտասանին անհրաժեշտ էր մարդկանց համոզել, ցույց տալ սեփական տեսակետի ճշմարտացիությունը: Ճարտասանությունը համար-

վում էր առաքինություն, և այն հունական կրթության կարևոր բաղադրիչն էր՝ կրթությունը կազմող յոթ ազատ արվեստներից մեկը: Եվ, բնականաբար, հարցադրման պատասխանի, համոզիչ խոսքի հիմնական արժանիքներից մեկը՝ զլխավորը, նրա փաստարկվածությունն էր, հիմնավորվածությունը, ապացուցելիությունը: Նման խոսքի կառուցման առաջին օրինակները տվեց հունական մաթեմատիկան: Բավական է նշել, որ մինչև հույները, թեև ինչպես Եգիպտոսում, այնպես էլ Միջագետքում կար բավականին զարգացած մաթեմատիկա, բայց դրանցում առկա չէր ապացուցման որևէ տարր, դրվագ, անգամ ապացուցման վերաբերյալ որևէ հարցադրում: Եվ առաջինը հույներն էին՝ Թալեսը, Պյութագորասը և նրանց հետևորդները, որ առաջ քաշեցին ապացուցման գաղափարը և իրագործեցին երկրաչափական փաստերի, թեորեմների ապացուցում: Այս գործընթացին հաջորդեց Արիստոտելի կողմից տրամաբանության ստեղծումը, որը, փաստորեն, նաև գիտություն էր ապացուցման մասին:

Առօրեական խոսքում, սովորաբար, որպես ապացուցում դիտարկվում է ինչ-որ պնդման իրավացիությունը հաստատող փաստարկումների ամբողջությունը: Նման փաստարկումներ կարող են լինել անառարկելի, ստուգված փաստերը, դրույթները, փորձի արդյունքները, հեղինակավոր մարդկանց կարծիքները և այլն: Ապացուցման այդպիսի մեկնաբանությունը և կիրառությունը, սակայն, հիմնավոր կարող է չլինել, և գիտական ուսումնասիրություններում ապացուցման նկատմամբ կիրառվում է այլ մոտեցում: Այստեղ դիտարկվում են ապացուցումների հետևյալ տեսակները.

- փաստաբանական՝ փաստերի վրա հիմնված ապացուցումները,
- էմպիրիկ՝ փորձի իմաստավորման և ընդհանրացման վրա հիմնված ապացուցումները,
- ձևական-տրամաբանական, որտեղ փաստարկումը հենվում է ձևական տրամաբանության օրենքների վրա:

Անշուշտ, տարբեր գիտություններ, իրականացնելով ճանաչողության գործառույթներ, օգտվում են ապացուցման իրենց զինանոցից, բայց բոլորի համար տրամաբանությունը տալիս է ապացուցման համընդհանուր կաղապարներ, որոնց պետք է ենթարկվեն մնացած գիտություններում (և ոչ միայն գիտություններում) առաջադրվող ապացուցումները: Իսկ մաթեմատիկան ապացուցման համար կիրառում է ուրույն մոտեցում, ինչը և մաթեմատիկական գիտելիքի նկատմամբ վստահության հիմնական պատճառն է: Քսաներորդ դարի սկզբին, փորձելով հաղթահարել

մաթեմատիկայում և փիլիսոփայության մեջ ծագած մի շարք լուրջ հակասություններ (պարադոքսներ), գերմանացի մաթեմատիկոս Դավիթ Հիլբերտը տվեց մաթեմատիկական ապացուցման հետևյալ սահմանումը, որը կարելի էր հեշտությամբ հարմարեցնել նաև այլ գիտությունների համար (հարկ է խոստովանել, որ Հիլբերտին և նրա հետևորդներին այդպես էլ չհաջողվեց հաղթահարել նշված հակասությունները)։

Ա բանաձևի ապացուցումը բանաձևերի այնպիսի $A_1, A_2, \dots, A_n$ հաջորդականությունն է, որի յուրաքանչյուր անդամ կամ աքսիոմ է, կամ էլ ստացվում է իր նախորդներից արտաձման ինչ-որ կանոնով, իսկ վերջին անդամն էլ հենց A -ն է [77]։

Թվում է, թե առանձին բացատրության կարիք չունի այս սահմանման մեջ կիրառվող “աքսիոմ” եզրույթը. յուրաքանչյուր գիտություն կամ տեսություն ունի աքսիոմների՝ անառարկելի դրույթների իր համակարգը, որոնք, որպես ճշմարտություններ, ընդունվում են այդ գիտության կամ տեսության շրջանակներում։ Ինչ վերաբերում է արտաձման կանոններին, ապա դրանք էլ կարող են լինել այդ տեսության արդեն ապացուցված դրույթներ կամ մտահանգումների ձևեր, որոնք դարձյալ ճշմարիտ են համարվում տվյալ գիտության կամ տեսության շրջանակներում։ Օրինակ, իրավունքի տեսության մեջ կիրառվում է այսպիսի արտաձման կանոն. ՀՀ բոլոր չափահաս քաղաքացիները ունեն ընտրելու իրավունք։ Ա-ն ՀՀ չափահաս քաղաքացի է։ Ուրեմն՝ Ա-ն ունի ընտրելու իրավունք։ Հանրահաշվի հանրակրթական դպրոցի դասընթացում կիրառվում է արտաձման այսպիսի կանոն. եթե անհավասարության երկու մասերին գումարենք հավասար թվեր, ապա կստանանք տվածի հետ նույնիմաստ անհավասարություն։

Առօրեական խոսքում և հասարակական գիտությունների մեջ միշտ չէ, որ հնարավոր է լինում հետևել ապացուցման այս ընթացքին կամ երբեմն անհնար է լինում նման ապացուցումներ կատարել. այստեղ վիճարկելի են լինում և՛ որպես աքսիոմ կամ ճշմարտություն ներկայացվող դրույթները, և՛ արտաձման կանոնները։ Այլ է պատկերը մաթեմատիկայում, որտեղ հստակ են թե՛ աքսիոմները, թե՛ արտաձման կանոնները։ Այդ պատճառով մաթեմատիկական ապացուցումները հավաստի են, հստակ, զուսպ ու չափավոր. հատկանիշներ, որոնք բնութագրում են նաև արվեստի գործերը, մասնավորապես՝ ճարտարապետական կառույցները։

Մաթեմատիկական ապացուցումը, նրա յուրաքանչյուր արտաձումը ներկայացնող բանաձևերի հաջորդականություն ցույց է տալիս նաև

մտածողության ընթացքը, տարբեր բանաձևերի ու դատողությունների փոխկապակցվածությունը: Եվ բանաձևերի այդ ներքին կապը հաճախ աչքի է ընկնում իր խորությամբ, անսպասելիությամբ, անկանխատեսելիությամբ, և կապակցությունների ողջ շղթային հաղորդում է գեղագիտական մեծ գրավչություն: Նշված պատճառները թվում են բավարարյց տալու համար մաթեմատիկական ապացուցման գեղագիտական մեծ ներուժը: Դրանք են նաև, որ Պոլ Լոկհարդին թույլ են տալիս մաթեմատիկական համարել «ապացուցումների արվեստ»:

3. Ապացուցման կառույցի ճարտարապետությունը

Ապացուցման գեղագիտական գրավչությունը պայմանավորված է նաև նրա կառուցվածքով: Իսկ ինչպե՞ս է կառուցված ապացուցումը: Յուրաքանչյուր ապացուցում կազմվում է երեք հիմնական տարրերից.

- ապացուցման թեզիսը՝ դատողություն, որի ճշմարտությունը պահանջվում է հաստատել ապացուցման միջոցով,
- արգումենտները (հիմքերը, փաստարկումները)՝ դատողություններ, որոնց ճշարիտ լինելը արդեն հայտնի է և որոնք օգտագործվում են տվյալ ապացուցման մեջ,
- ցուցադրումը՝ նշված երկու տարրերը կապող տրամաբանական ձևը:

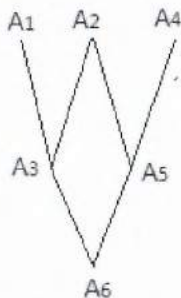
Ապացուցման արդյունավետությունը պայմանավորված է ճանաչողական, մեթոդաբանական, տրամաբանական, ճարտասանական և այլ գործոններով, սակայն նրանում գլխավորը վերոնշյալ երեք տարրերն են: Ընդ որում, ապացուցման ողջ ընթացքում նրա թեզիսը պետք է բավարարի ձևակերպման ճշգրտության և անփոփոխության կանոններին, նրանում չպետք է դրսևտերվի թեզիսի կամ հասկացությունների փոխարինում, ճշմարիտ պետք է լինեն ապացուցման արգումենտները (փաստարկումները):

Ասվածից հետևում է, որ մաթեմատիկայի դասավանդման ընթացքում պետք է աշխատել ավելի նշանակալից դարձնելու հիմնավորման, փաստարկման, ապացուցման դերը: Այդ նպատակով մաթեմատիկայի արևմտյան շատ դասագրքերում թեորեմի ապացուցման քայլերին զուգահեռ բերվում են նաև դրանց փաստարկումները՝ արքսիոմների և արտածման կանոնների անվանումները, ինչն օգնում է լավ հասկանալու ապացուց-

ման մեխանիզմը, ձևավորելու փաստարկված խոսքի մշակույթ: Մակայն պետք է խոստովանել, որ հաջորդականության տեսքով տրված ապացուցումներում հաճախ տեխնիկապես դժվար է լինում նշել, թե ապացուցման քայլը կատարելիս հատկապես ո՞ր բանաձևերի նկատմամբ է կիրառվում արտաձման այս կամ այն կանոնը: Բսկ եթե նման հստակեցում մտցվի էլ, ապա այն ապացույցին կտա շատ ծավալուն տեսք, և պատկերման տեխնիկական բարդությունները կհանգեցնեն ապացույցի նկատմամբ հետաքրքրության կտրուկ թուլացման: Ահա այստեղ մեզ օգնում է ապացուցման մեկ այլ սահմանում, որ տվել է Հիլբերտի աշակերտ Գերհարդ Հենցենը՝ ապացուցումը ներկայացնելով ծառի տեսքով (տես [77]): Մեկնաբանենք Հենցենի մտահղացումը կոնկրետ օրինակի վրա:

Դիցուք ունենք A_6 բանաձևի $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ ապացուցումը: Բանաձևերի այս հաջորդական հրաշալի տեսքը, սակայն, անօգտակար է, երբ ուզում ենք այս ապացույցը սովորեցնել աշակերտին: Այստեղ մենք պետք է նշենք նախ կիրառվող աքսիոմները, ապա և արտաձման կանոնները: Դիցուք առաջին, երկրորդ և չորրորդ բանաձևերը աքսիոմներ են, իսկ երրորդ, հինգերորդ և վեցերորդ բանաձևերը ստացվում են արտաձման կանոններով. երրորդը՝ առաջին երկուսից, հինգերորդը՝ երկրորդից և չորրորդից, իսկ վեցերորդը՝ երրորդից և հինգերորդից: Մենք պարտավոր ենք դրանք հերթականությամբ նշել ապացուցման ընթացքում և հանգել ապացուցման: Նման պատկերման դեպքում գործընթացը ձգձգվում է, միասնական տեսք չի ստանում և ընկալելի չի դառնում:

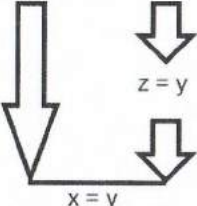
Այժմ հետևենք Հենցենին: Նա այդ ապացուցումը ներկայացնում է հետևյալ «ծառի» տեսքով. նախապես պայմանավորվելով, որ ծառի գագաթներում գրված բանաձևերը աքսիոմներ են, իսկ երկու կամ մի քանի կետերից ներքև և այդ կետերին գծերով (ճյուղերով) միացված բանաձևը ստացվում է այդ բանաձևերից արտաձման համապատասխան կանոնով, ինչը որպես փաստարկ մենք գրում ենք ապացուցման կողքին բերված փաստարկումների բաժնում: Ապացուցումը և փաստարկումը ստանում են հետևյալ վերջնական տեսքը (տես գծագիրը):



Գեղեցի՞կ է: Խոսքը, իհարկե, գծագրի մասին չէ (ինչը նույնպես ունի գեղագիտական իր գրավչությունը): Այն հնարավորություն է տալիս աշակերտին՝ տեսնելու թեորեմի ապացուցման հիմքում ընկած դատողությունների և մտահանգումների ողջ մեխանիզմը և հստակ պատկերացնելու փաստարկումների ողջ համակարգը: Այսպես են կատարվում ու ներկայացվում [9]-[11] դասագրքերի շատ ապացուցումներ: Բերենք մի օրինակ:

Միևնույն արտահայտությանը հավասար արտահայտությունների հատկությունը

Միևնույն արտահայտությանը հավասար արտահայտությունները իրար հավասար են: Այսինքն, կամայական x , y և z արտահայտությունների համար՝ եթե $x = z$, $y = z$, ապա $x = y$:

Ապացուցումը	Փաստարկները
	Պայմանները Հավասարության համաչափության օրենքը Հավասարության փոխանցելիության օրենքը

Ի. Լ. Տիմոֆեյևիկան ապացուցումների նման ներկայացումը կարևորում է որպես ուսուցիչների պատրաստման լավագույն միջոց, իսկ աշակերտի համար համապատասխան խնդրի իրագործումը համարում մեթոդական շատ լուրջ խնդիր, որ կարոտ է լուծման (տես [199]): Նա, դժբախտաբար, ծանոթ չի եղել իր աշխատանքից տարիներ առաջ իրականացված հայաստանյան փորձին:

Հավելենք, որ ծառի տեսքով ներկայացված ապացուցումներում լայնորեն դրսևորվում է նաև դրանց արտաքին և ներքին գեղագիտությունը: Մի կողմից ապացուցումը ստանում է պատկերային որոշակի տեսք, որն ունի իր արտաքին գրավչությունը, մյուս կողմից՝ այդ պատկերը կազմող տարրերը իրար հետ շաղկապված են հետաքրքիր կապերով, որոնցում դրսևորվում է ապացուցման ներքին գեղագիտությունը:

4. Ապացուցման ուսուցման գեղագիտական գրավչությունը

Մենք անդրադարձանք «ինչո՞ւ» հարցադրման միջոցով ապացուցման առաջադրման իմաստաբանական նշանակությանը, տվեցինք ապացուցման սահմանումը, նշեցինք նրա կարևորությունը հանրակրթական դրաբրոցի մաթեմատիկայի դասընթացում և ներկայացրինք նրա ըմբռնումը արդյունավետ դարձնելու կոնկրետ եղանակ: Բայց ասվածը դեռևս չի ապահովում կոնկրետ թեորեմների ապացուցման ուսուցման իրագործումը: Դրա արդյունավետությունը, ինչպես նաև գեղագիտական գրավչությունը մեծապես կախված են ապացուցման ուսուցման մեջ ստեղծագործական տարրի ներառումից, ուսուցումը ապացույցի որոնման, հայտնաբերման և կառուցման գործընթացի հանգեցնելուց: Սրանք խնդիրներ են, որոնց իրագործման ընթացքում դրսևորվում են նաև մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշները: Այս խնդիրների իրականացման համար մենք պետք է պատասխանենք ևս մի քանի հարցադրումներին:

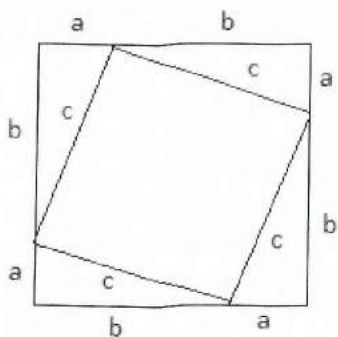
Նախ՝ ի՞նչ է տրված և ի՞նչ պետք է ապացուցել: Առանց թեորեմի պայմանների և եզրակացության հստակ գիտակցության, անհնար է գտնել և իրագործել նրա ապացուցումը, և պետք չէ շտապել, անցնել առաջ: Չպետք է մոռանալ, որ այդ պահին սովորողի մոտ ձևավորվում են նաև գիտական գեղեցիկի այնպիսի սուբյեկտիվ հատկանիշներ, ինչպիսիք են ոչ ակնհայտ ճշմարտության իմացությունը, ջանքերը, որ ներդրվում են առարկայի, երևույթի էությունը հասկանալու համար: Նշենք, որ որոնման այդ ընթացքը զուգորդվում է նաև գիտական գեղեցիկի այնպիսի սուբյեկտիվ հատկանիշի դրսևորմամբ, ինչպիսին է նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարումը, ինչը ավելի մեծ կարևորություն ու կշիռ է ստանում մաթեմատիկական ոլորտի վերացական բնույթի պատճառով:

Որոնման ընթացքում պետք է նախ պարզել, թե ինչպե՞ս են կատարվում ապացուցման առանձին քայլերը, ինչպե՞ս են նրա անդամները ստացվում մյուս անդամներից: Ապացույցի, նրա քայլերի հայտնաբերման համար կատարվող որոնումը իրականացվում է ապացույցի հետ առնչվող փաստերի ոլորտում, և ինչքան լայն լինի դրանց վերաբերյալ սովորողի իմացությունը, այնքան հեշտ ու արդյունավետ կլինի որոնումը:

Ասվածը ցուցադրենք ծրագրային այնպիսի կարևոր թեորեմի օրինակի վրա, ինչպիսին Պյութագորասի թեորեմն է: Ես արդեն ներկայացրել եմ

դրա գեղագիտական գրավչությունը: Անցնենք ապացուցմանը: Ինչպե՞ս կատարել այն: Իհարկե, աշակերտների ուժերից վեր է որևէ ապացուցում առաջարկել: Նրանք իզորու չեն նույնիսկ մտածել ապացուցման որևէ ճանապարհի մասին: Ապացուցման այդ անկանխատեսելիությունը, օրինակ, հիմք է տվել որոշ հետազոտողների ենթադրելու, որ առանց ապացույցի իմացության անհնար է գտնել, հայտնագործել այդ թեորեմը, ինչից էլ նա եզրակացնում է, որ թեորեմի ապացուցումը պատկանում է ոչ թե Պյութագորասին, այլ բաբելոնացիներին, որոնք իմացել են այն:

Շեղվելով նյութից՝ հարկ է նշել, որ, ի վերջո, բաբելոնացիների կամ նրանց նախորդների մեջ եղե՞լ է մեկը՝ հանճարեղը, որ կատարել է այդ հայտնագործությունը: Իսկ մի՞թե դա չէր կարող լինել Պյութագորասը (դժվար է այդ ժամանակներում նրանից ավելի հանճարեղ մարդ պատկերացնել): Մանավանդ՝ ճանաչողության նկատմամբ հունական



մտեցումները իրենց հարցադրումներով սկզբունքորեն նոր որակ էին ձեռք բերել և ապացուցման պահանջը, որ չկար բաբելոնացիների մոտ, հույների համար իմացության առաջնային պայման էր:

Դառնալով մերօրյա աշակերտներին՝ նշենք, որ, համեմայնդեպս, նրանց համար ապացույցը անկանխատեսելի է, և որպեսզի անկանխատեսելիության գեղագիտական հատկանիշը լիովին դրսևորվի, անհրաժեշտ է աշակերտին ինչ-որ ժամանակ տրամադրել

ապացուցման ուղղությամբ մտածելու համար: Ես իմ պրակտիկայում կատարում էի հետևյալ գծագրերը և առաջարկում մտածել դրանց շուրջ:

Եթե աշակերտների կողմից որևէ մտահղացում չէր կատարվում ապա առաջարկում էի համեմատել ստացված պատկերների մակերեսները: Եթե դա էլ չէր օգնում, ապա առաջարկում էի մեծ քառակուսու մակերեսը ստանալ երկու ճանապարհով և արդյունքները հավասարեցնել: Վերջապես, որոշ ժամանակ անց աշակերտներից մի քանիսը կարողանում էին ստանալ թեորեմի ապացուցումը: Եվ միայն տեսնել էր պետք նրանց վառվող աչքերը, որոնցից հորդում էին հաճույքը և բերկրանքը ...

§5. ԳԵՂԵՑԻԿԻ ՁԵՎԱՎՈՐՈՒՄԸ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԳՈՐԾՆԹԱՑՈՒՄ

Դժբախտաբար, գոյություն չունի խնդիրների լուծման համընդհանուր և անթերի մեթոդ:

Ջորջ Պոյա

1. Մաթեմատիկական խնդրի գեղագիտական գրավչությունը

Խնդիրը և նրա լուծումը մարդու նպատակների իրականացման կարեվոր փուլերից են: Յուրաքանչյուր մարդ, իր կենսագործունեության ընթացքում առնչվելով կենցաղային, մասնագիտական, ինտելեկտուալ ամենատարբեր խնդիրների, պետք է լուծի դրանք, ըմբռնի դրանց էությունը, պատկերացնի առկա միջոցները և մտքի լարման միջոցով հանգի որոշակի պատասխանի: Նման գործընթացը մաթեմատիկական գործունեության բնորոշ առանձնահատկություններից մեկն է: Ավելին, մաթեմատիկական սովորեցնում է լուծել խնդիրը: Մաթեմատիկական խնդիրը աչքի է ընկնում իր հստակությամբ, իսկ նրա լուծումը՝ հուսալիությամբ: Մաթեմատիկան կոչված է նաև մոդելավորել կյանքում և գիտության այլ բնագավառներում առաջացած զանազան խնդիրներ, այսինքն՝ մաթեմատիկայի լեզվով գրել կիրառական խնդիրը և, բնականաբար, նրա լուծումը ստանալ մաթեմատիկական մեթոդներով: Մա էլ մաթեմատիկայի օգնությունն է այլ բնագավառներում ծագած խնդիրները լուծելիս:

Յուրաքանչյուր խնդիր իր պարզության կամ բարդության, լուծման հեշտության կամ դժվարության և այլ հատկանիշների հետ միասին ունի նաև իր գեղեցկությունը: Իսկ ո՞րն է մաթեմատիկական խնդրի գեղեցկությունը, նրա գեղագիտական գրավչությունը: Մ. Ս. Յակիրը, որպես մաթեմատիկական խնդրի գեղեցկության բնութագրման հայտանիշեր, առաջարկում է անկանխատեսելիությունը, անսպասելիությունը, պարզությունը, հեղափոխական քայլի առկայությունը, լավատեսությունը, աշխատանքը (տես [249]):

Անկանխատեսելիությունը հանդես է գալիս, երբ մարդ ի գործու չէ կռահելու խնդրի եզրակացությունը, իսկ անսպասելիությունը՝ երբ խնդրի պայմանները չեն թելադրում նրա եզրակացությունը: Նման դեպքերում

երբեմն դժվար է լինում հավատալ խնդրում առաջադրված պահանջի ճշմարտացիությանը:

Անսպասելիության և անկանխատեսելիության լավագույն օրինակ է Դեզարգի թեորեմը (յուրաքանչյուր թեորեմ կարելի է ձևակերպել նաև որպես մաթեմատիկական խնդիր). նրա պայմաններից եզրակացության ստացումը զարմացնում է և գեղագիտական մեծ հաճույք պատճառում:

Բերենք անկանխատեսելի խնդրի մեկ այլ օրինակ: Նախորդ պարագրաֆում սինուսների թեորեմի էմպիրիկ ուսուցման վերաբերյալ մեր դատողություններում մենք դիտարկեցինք եռանկյան կողմերի և անկյունների համեմատականության խնդիրը. ինչպիսի՞ն է այդ համեմատականությունը: Ահա խնդիր, որի արդյունքը դժվար է կռահել, այսինքն՝ այն անկանխատեսելի է: Իսկ այդ արդյունքը նաև շատ հետաքրքիր է ու պարզ, ուրեմն՝ նաև գեղեցիկ է: Պարզվում է, որ ուղիղ համեմատական են եռանկյան կողմերը և նրանց դիմացի անկյունների սինուսները, այսինքն՝ եռանկյան մի կողմը այնքան անգամ է մեծ մյուսից, որքան անգամ մեծ է նրա դիմացի անկյան սինուսը մյուսի դիմացի անկյան սինուսից:

Խնդրի պարզությունը վերաբերում է ինչպես նրա բովանդակությանը, այնպես էլ շարադրանքին: Հաճախ խնդիրը անհասկանալի է դառնում նրա ձևակերպման լեզվական անհարթությունների պատճառով, իսկ երբեմն էլ երկար-բարակ ձևակերպված պայմանների ետևում կռահելու բան չի մնում: Հասկանալի է, որ ավելորդ է խոսել նման խնդիրների գեղագիտական գրավչության մասին:

Հեղափոխական քայլի առկայությունը, լավատեսությունը և աշխատանքը ավելի շատ վերաբերում են խնդրի լուծմանը: Օրինակ, լուծելով Բազմանդամների արմատները նրա գործակիցների միջոցով արմատանշաններով արտահայտելու վերաբերյալ պատմական խնդիրը՝ Էվարիստ Գալուան օգտագործեց խմբի գաղափարը, ինչը հեղափոխական քայլ էր ողջ մաթեմատիկայում, և սկիզբ դրեց հանրահաշվի նոր բնագավառի, որն հետագայում կոչվեց Գալուայի անվամբ:

Լավատեսությունը ի հայտ է գալիս խնդրի լուծման, նրա պատասխանի ստացման արդյունքում: Եվ որովհետև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը հազեցված է խնդիրների լուծմամբ, այն նաև մեծապես նպաստում է սովորողի մոտ կյանքի նկատմամբ լավատեսական կողմնորոշման ձևավորմանը կամ պատճառ է դառնում վատատեսության:

Մաթեմատիկական խնդրի լուծումը պահանջում է համառ ու հետևողական աշխատանք: Այդ պատճառով այն ձևավորում է աշխատասիրու-

թյուն, ինչը, անշուշտ, պարունակում է նաև գեղագիտական հատկանիշներ:

2. Մաթեմատիկական խնդրի գեղագիտական գրավչությունը, երբ այն դիտարկվում է որպես խաղ

Երկրորդ գլխում մենք անդրադարձանք մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում խաղի դերին: Հետևենք խնդրի գեղագիտական գրավչությանը, երբ այն դիտարկվում ենք որպես խաղ: Համեմատենք մաթեմատիկական խնդրի լուծումը մարդկային մտքերը գերող լավագույն խաղերից մեկի՝ շախմատի հետ: Եթե մաթեմատիկական խնդրում հիմնական առարկաները նրա հասկացություններն են՝ թվերը, տառերը, գործողությունները, պատկերները և այլն, ապա շախմատում դրանք ֆիգուրաներն են՝ արքան, թագուհին, նավակները, փղերը, զինվորները և շախմատային տախտակը: Շախմատում առկա են խաղի հստակ կանոններ՝ ֆիգուրաների քայլերը և հարվածները: Մաթեմատիկական խնդրում խաղի կանոնները նույնպես ավելի քան հստակ են. դրանք այն տեսության արքիտեկտոնն են, որոնց շրջանակներում դիտարկվում է տվյալ խնդիրը: Երկու դեպքում էլ խնդիրը պահանջում է լուծում:

Բայց ինչո՞ւ միլիոնավոր մարդիկ՝ նաև իրենց մասնագիտական գործունեությունից հետո, ինքնամոռաց, ժամերով նստում են շախմատի տախտակի առջև և փորձում են լուծել շախմատային այդ հավերժ չլուծվող խնդիրը, հետևում են շախմատային խաղի վարպետների մրցումներին, բայց դժկամորեն են տրվում մաթեմատիկական խնդիրների լուծմանը: Բիարկե, մեծ նշանակություն ունի շախմատում մրցակցի առկայությունը: Մի անգամ Մոսկվայի Մարգարյան Տիգրան Պետրոսյանի մասին լրագրողին տրված հարցազրույցում «Ի՞նչ է Ձեզ համար շախմատը» հարցին տվեց հետևյալ հետաքրքիր պատասխանը. «Շախմատը ինձ համար մրցակցի հետ հաղորդակցվելու միջոց է»: Մեծ իմաստասեր Էպիկուրը մարդկանց հետ հաղորդակցման լավագույն միջոց էր համարում փիլիսոփայական զրույցը:

Անշուշտ, ուրիշների հետ հաղորդակցությունը, շփումը հուզական մեծ լիցք է պարունակում և որոշակի գրավչություն է հաղորդում մարդկային գործունեությանը: Բայց հարցն այստեղ մարդկային հաղորդակցման հետ չի կապված. չէ՞ որ մարդիկ, առանձնապես խաղի իսկական վարպետ-

ները՝ երեխաները, սիրում են ժամերով ու անմոռաց, առանց կենդանի մրցակցի նստել համակարգչի առջև ինչ-որ խաղ խաղալու համար:

Ինչպես շախմատի, այնպես էլ յուրաքանչյուր խաղի գեղեցկությունը գնահատվում է ոչ թե գեղագիտական գեղեցիկի, այլ գիտական գեղեցիկի չափանիշներով: Իսկապես, շախմատային քայլի գեղեցկությունը նրա անսպասելիությունն է, անկանխատեսելիությունը, շախմատային պարտիայի գեղեցկությունը նրա հաշվարկների ճշգրտությունն է, տրամաբանական խստությունը, ներքին խորը կապի առկայությունը և, իհարկե, հաղթանակը:

Բայց գիտական գեղեցիկի այս բոլոր հատկանիշները ավելի քան առկա են նաև մաթեմատիկական խնդրի մեջ: Ընդ որում, մաթեմատիկական խնդրում հաղթանակը խնդրի լուծումն է, նրա պատասխանի ստացումը: Եթե շախմատային պարտիայում տարած հաղթանակը բերում է հաջողություն, գնահատում, ուրախություն, ապա նմանատիպ արդյունքների է հանգեցնում նաև մաթեմատիկական խնդրի լուծումը: Եվ դժվար է ասել, թե որ դեպքում է հաղթանակի հուզական լիցքը ավելի մեծ՝ Միխայիլ Բոտվիննիկի նկատմամբ Տիգրան Պետրոսյանի տարած հաղթանակի⁹, թե՞ Գալուայի կողմից հավասարումների լուծումները արմատանշաններով արտահայտելու վերաբերյալ խնդրի կամ Լոբաչևսկու կողմից գուգահեռության աքսիոմի անկախության վերաբերյալ խնդրի լուծման դեպքում: Եթե առաջին դեպքում շախմատային աշխարհը ունեցավ իր ինտերոդ չեմպիոնը, ապա երկրորդ և երրորդ դեպքերում մաթեմատիկական գիտությունը ապրեց հեղաշրջում և համալրվեց իր կարևորագույն բնագավառներով:

Բայց կա մի հատկանիշ, որով շախմատը և մաթեմատիկական խնդիրը տարբերվում են իրարից, և եթե մաթեմատիկական խնդիրը, որպես գիտական իմացություն, իր հետաքրքրությունը պահում է այնքան ժամանակ, քանի դեռ չի լուծվել, իսկ լուծվելուց հետո կորցնում է այն, ապա շախմատային խնդրին հատուկ է հետաքրքրության գեղագիտական ըմբռնումը. այն չի մարում շախմատային պարտիայի ավարտից հետո: Թվում է, թե այս հատկանիշով շախմատային պարտիան ձեռք է բերում արվեստական գուտ գեղագիտական գեղեցկություն: Սակայն չշտապենք. պատճառը բոլորովին այլ է:

Սովորաբար մաթեմատիկական խնդրի պայմանները այնպես են տրվում, որ անկախ լուծման մեթոդներից ու եղանակներից, այն ստանում է որոշակի լուծում, պատասխան: Շախմատային խաղը՝ որպես

խնդիր, այդպիսին չէ: Այն չունի մեկ պատասխան, նրա լուծումը կախված է քայլերի ընտրությունից, որոնցից յուրաքանչյուրը խաղացողին տանում է մի ճանապարհով, և այդ ճանապարհների քանակը անվերջանալի է: Ինչպես մաթեմատիկական խնդրում, շախմատում նույնպես խաղացողների մոտ կորչում է միևնույն պարտիան երկրորդ անգամ խաղալու ցանկությունը, բայց, ի տարբերություն մաթեմատիկոսների, շախմատիստներն ունեն նոր քայլ, նոր ճանապարհ ընտրելու հնարավորություն, իսկ մաթեմատիկոսը տվյալ խնդիրը լուծելիս նման հնարավորություն չունի: Նորը ստանալու համար նա պետք է ամեն անգամ փոխի խաղի (խնդրի) կանոնները: Իսկ շախմատում այդ կանոնները անփոփոխ են:

Ահա միևնույն խնդրի անսահմանափակության, անվերջության այդ հատկանիշն է, որ շախմատային խաղը տարբերում է մաթեմատիկական թեկուզ և ամենաբարդ խնդիր-խաղից: Դա է նրա նկատմամբ չթուլացող հետաքրքրության, ձգողականության հիմնական պատճառը: Այս տեսակետից այն համեմատելի է մաթեմատիկայի առանձին բնագավառներում դիտարկվող զանազան թեմաների հետ, որտեղ, սակայն, ոչ մասնագետի համար ինչպես գործունեությունը, այնպես էլ նրա գեղագիտությունը անհասանելի են և անընկալելի:

3. Խնդրի գործառույթները և նրա գեղագիտական գրավչությունը

Մաթեմատիկական խնդիրը նրա ուսուցման գործընթացի կարևորագույն բաղադրիչներից մեկն է: Այն հաճախ հանդես է գալիս նաև որպես ուսուցման նպատակ: Խնդիրը իրականացնում է ամենատարբեր գործառույթներ: Այստեղ մենք կդիտարկենք դրանցից հիմնականները՝ խնդրի ուսուցանող, ճանաչողական, զարգացնող, վերահսկող, մոտիվային և դաստիարակող գործառույթները: Այդ գործառույթներից յուրաքանչյուրը ունի նաև սովորողի գեղագիտական որակների ձևավորման և զարգացման լայն հնարավորություններ:

Ուսուցումը մաթեմատիկական խնդրի կարևորագույն գործառույթներից մեկն է: Զինական ժողովրդական առածն ասում է՝ «Ես լսում եմ և մոռանում եմ, ես տեսնում եմ և հիշում եմ, ես անում եմ և հասկանում եմ»: Ահա մաթեմատիկական խնդիրը, վարժությունը նպատակաուղղված է այդ հասկանալու գործընթացի ձևավորմանը: Խնդրի լուծման միջոցով

ձևավորված գիտելիքները, կարողություններն ու հմտությունները արտահայտում են իմացության այն մակարդակը, երբ սովորողը կարողանում է կիրառել իր ունակությունները, գնահատել դրանք, զգալ ինքնավստահ: Սա ստեղծում է մաթեմատիկայի ուսուցման ընդհանուր գեղագիտական դրական միջավայր, իսկ խնդրի լուծման գործընթացի առանձին տարրերի իրականացման դրական ընթացքն ուղեկցվում է համապատասխան դրական հուզական ապրումներով: Օրինակ, խնդրի պատասխանի ստացմանը հաջորդում է ոգևորվածության այնպիսի հուզական վիճակ, որը սովորողին մղում է հետագա գործունեության: Սովորողին հետաքրքրում են նոր խնդիրներ, նա ձգտում է դրանց լուծմանը և լուծման համար անհրաժեշտ գիտելիքների իմացության: Ուսուցման ողջ գործընթացը նրան դուր է գալիս, նա սիրում է սովորել: Իսկ իրեն սիրել ստիպում, պարտադրում է գեղեցիկը: Ուրեմն, խնդրի հաջող լուծումը նպաստում է, գեղեցիկ է դարձնում ուսուցման ողջ գործընթացը:

Գեղագիտական գրավչության մեծ լիցք է պարունակում մաթեմատիկական խնդրի ճանաչողական գործառույթը: Հիշենք թեկուզ Գալիլեյի խոսքերը. «Բնության ոսկե գիրքը գրված է մաթեմատիկայի լեզվով, և այն կարդալու համար պետք է իմանալ մաթեմատիկայի լեզուն»: Բնության այդ գրքի, նրա ուսումնասիրությանն ուղղված գիտությունների համապատասխան խնդիրները մոդելավորվում, դառնում են մաթեմատիկական խնդիրներ, որոնց լուծումն ու ստացված պատասխանների ճշմարտացիությունը որևէ մեկի մոտ կասկած չեն առաջացնում: Բնության և այն ուսումնասիրող գիտությունների միջև կապն արդեն աշխարհում ստեղծված ամենամեծ ու խորհրդավոր ներդաշնակությունն է ու գեղեցկությունը, որին լրացուցիչ հմայք է հաղորդում նաև մաթեմատիկայի բերած ճշմարտության լույսը: Այս հրաշալի ներդաշնակության մեջ իրենց մեծ դերն ունեն մաթեմատիկական խնդիրները:

Մեթոդական գրականության մեջ խնդրի զարգացնող գործառույթին նպաստող գործողություններ են համարվում խնդրի լուծման ռացիոնալ ճանապարհների որոնումը, նրա մասնավոր և սահմանային դեպքերի քննարկումները, պայմանների մասնակի փոփոխությունը և այլն: Այս ճանապարհներից յուրաքանչյուրը իր մեջ պարունակում է նաև գեղագիտական գրավչության համապատասխան տարրեր:

Խնդրի և նրա լուծման միջոցով սովորողի գեղագիտական որակների զարգացման կարելի է հասնել նաև ինչպես խնդրի բովանդակության մեջ ներառելով համաչափությունը, համեմատությունը և մաթեմատիկական

գեղեցիկի արտահայտման այլ դրսևորումներ, այնպես էլ կամայական խնդրի լուծման ընթացքը լցնելով գեղագիտական գրավչությամբ: Դրան նպաստող առաջին հանգամանքը սովորողի ներգրավումն է խնդրի լուծման գործընթացի մեջ: Ուշադրության արժանանալը, գրատախտակի մոտ գտնվելը, պարզապես խնդիր լուծելն արդեն սովորողի մոտ առաջացնում են հուզական ապրումներ, իսկ այդ գործողությունների հաջող ելքը գեղեցիկ է և ուրեմն, նպաստում է ինչպես ուսման գործընթացի հաջողությանը, այնպես էլ սովորողի մոտ գեղագիտական պահանջմունքի, բավարարվածության և այլ որակների զարգացմանը:

Անգամ ոչ դրական արդյունքի դեպքում խնդրի լուծմանն ուղղված աշխատանքը աշակերտի մոտ գեղագիտական որակի զարգացման հատկանիշ է, իսկ դրական ելքը ավելացնում է մի այլ որակ՝ լավատեսություն: Հարկ է, որ ուսուցիչը նշի նաև խնդրի գեղագիտական գրավչության այնպիսի որակներ, որոնք տեսանելի չեն սովորողին՝ խնդրի անկանխատեսելիությունը, անսպասելիությունը և այլն:

Գեղագիտական արժեքների ձևավորման ամենալայն հնարավորություններ են ստեղծվում խնդրի դաստիարակչական, մասնավորապես՝ արժեքների ձևավորման գործառույթը իրականացնելիս: Առանց համառության, տոկունության, հետևողականության, նպատակասլացության և կամային այլ որակների դրսևորման անհնար է պատկերացնել քիչ թե շատ դժվար խնդրի լուծում: Եվ կամային այդ որակների մշտական ներկայությունը մաթեմատիկական խնդիրների լուծման գործընթացում ձևավորում և զարգացնում է դրանք (այդ մասին հանգամանորեն տես [19]): Ինչպես արդեն նշել ենք, մաթեմատիկական գործունեությունը ընդհանրապես և խնդիրների լուծման գործընթացը, մասնավորապես, մեծապես նպաստում են նաև մտածողության, ուշադրության (տես [3]), հիշողության (տես [1]) հոգեկան երևույթների ձևավորմանը և զարգացմանը: Այսպիսով, մաթեմատիկական խնդիրների լուծման գործընթացը նպաստում է դաստիարակության այնպիսի կարևոր բաղադրիչների ձևավորման և զարգացման գործընթացին, ինչպիսիք են հոգեկան երևույթները: Իսկ վերջիններս մարդու գործունեության և, մասնավորապես, գեղագիտական գործունեության հաջող իրականացման կարևորագույն նախադրյալներ են:

Մարդու գեղագիտական գործունեության իրականացման մյուս կարևոր նախադրյալը նրա բարոյական նկարագիրն է: Առանց դրական բարոյական հատկանիշների անհնար է պատկերացնել գեղեցիկի և, ընդհան-

րապես, գեղագիտականի դրսևորումը: Իսկ մաթեմատիկական կրթությունը և նրա խնդիրների համակարգն ունեն բարոյական արժեքների ձևավորման մեծ ներուժ (տես [14]): Մասնավորապես, անցյալի հայ մաթեմատիկոսների դասագրքերում ընդգրկված խնդիրներն ունեն լավատեսության, բարոյական դրական որակների արժարժման որոշակի միտում (տես [26]):

4. Գեղագիտական գրավչությունը խնդրի տարբեր տեսակներում

Մաթեմատիկայի մեթոդիկայում ընդունված է խնդիրների դասակարգումը կամ տեսակավորումը կատարել ըստ տարբեր հիմքերի: Մենք կդիտարկենք միայն դասակարգումը՝ ըստ խնդրի պահանջների բնույթի: Այս հիմքով առանձնացվում են ապացուցման, հաշվման, կառուցման, մոդելավորման և հետաքրքրաշարժ խնդիրների տեսակները, որոնք մեծ նշանակություն ունեն մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում և որոնցից յուրաքանչյուրին հատուկ է գեղագիտական յուրատեսակ գրավչություն:

Հետաքրքրաշարժ խնդիրների գեղագիտական գրավչությունը: Անշուշտ, յուրաքանչյուր մաթեմատիկական խնդիր ունի իր գրավչությունը: Սակայն կան խնդիրներ, որոնց մասին մենք ասում ենք, որ դրանք գեղեցիկ են, այսինքն՝ առանձնանում են խնդիրների մեջ իրենց գեղեցկությամբ: Շախմատում առավել գեղեցիկ խնդիրները բնութագրվում են «էտյուտ» անվանումով: Մաթեմատիկայի էտյուտները հետաքրքրաշարժ խնդիրներն են:

Նման խնդրի հետաքրքիր պատումը (ֆաբուլան), նրա պարզությունը, հասկանալու և լուծման համար անհրաժեշտ մաթեմատիկական գիտելիքների նվազագույն պահանջը ձգում են մարդուն: Իսկ դրանց լուծումը սովորաբար պահանջում է ինքնատիպ մոտեցում, մտքի լարում, ճկունություն և խելք. հատկանիշներ, որոնցով յուրաքանչյուր մարդ իր գնահատմամբ օժտված է առատորեն և կուգեր (գոնե իր հետաքրքրասիրության բավարարման նպատակով) ստուգել իր այդ որակների առկայության աստիճանը (ավելի հարմար առիթ դժվար է պատկերացնել): Միաժամանակ, այդ խնդիրները պարունակում են ինքնաճանաչման, իր հանդեպ հետաքրքրություն արթնացնելու մեծ ներուժ:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացի կարևոր սկզբունքներից մեկը շարունակականությունն է, նոր նյութը հենվում է նախորդի վրա, և այն հասկանալու համար անհրաժեշտ է իմանալ անցածը, իսկ աշակերտների մի զգալի մասը չգիտի կամ մոռացել է այն: Այս երևույթը թույլ չի տալիս ուսուցչին ոչ միայն նման աշակերտին ներգրավել ուսուցման գործընթացի մեջ, այլև հայտնաբերել նրա՝ մաթեմատիկան յուրացնելու իրական կարողությունները կամ մաթեմատիկական ընդունակությունները: Ահա հետաքրքրաշարժ խնդիրները՝ նրանցում մաթեմատիկական գիտելիքի օգտագործման նվազագույն պահանջի պատճառով, հնարավորություն են ընձեռում լուծելու այդ մանկավարժական խնդիրները: Միաժամանակ նման խնդիրների գեղագիտական գրավչությունը, դրանց լուծմանն ուղեկցող հուզական տարրը նպաստում են սովորողի կամային որակների զարգացմանը (տես [19]), ինչի իրականացումը պետք է համարել ուսուցման գործընթացի կարևոր նվաճում: Ասվածի հետ համահունչ են նաև մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացի միջոցով գեղագիտական պահանջմունքների ձևավորման վերաբերյալ մեր դիտարկումները (տես [21]):

Հետաքրքրաշարժ խնդիրների մի լայն դաս ստացվում է կեղծ մետաղադրամը որոշելու հարցի քննարկումից: Նման խնդիրները, ըստ բարդության աստիճանների, մենք ներառել ենք [9]-[11] դասագրքերում: Ահա նման մի խնդիր [10] դասագրքից (N 387):

15 միատեսակ մետաղադրամներից մեկը կեղծ է: Երկնժարանոց կշեռքով և կշռաքարեր չօգտագործելով կարո՞ղ եք երկու կշռումով որոշել՝ ծա՞նր է, թե՞ թեթև կեղծ մետաղադրամը:

Լուծումը: Մետաղադրամները բաժանենք երեք խմբի՝ յուրաքանչյուրում հինգ հատ: Առաջին կշռումով առաջին խումբը դնենք մի նժարին, երկրորդը՝ մյուս նժարին: Հնարավոր է երկու դեպք.

ա. նժարները հավասարակշռվում են,

բ. նժարները չեն հավասարակշռվում:

ա. Այս դեպքում կեղծ մետաղադրամը երրորդ խմբում է, և մենք առաջին խումբը թողնենք նժարին, իսկ երկրորդ խումբը փոխարինենք երրորդով: Եթե առաջին խումբը պարունակող նժարը թեթևեց ցած, ապա կեղծ մետաղադրամը թեթև է, իսկ եթե բարձրացավ վերև, ապա կեղծ մետաղադրամը ծանր է:

բ. Այս դեպքում նժարներից մեկը թեթևում է ներքև. դիցուք այդ նժարը առաջին խումբը պարունակողն է: Առաջին խումբը թողնենք նժարին, իսկ

երկրորդ խումբը փոխարինենք երրորդով: Եթե նժարները հավասարակշռվեն, ապա կեղծ մետաղադրամը երկրորդ խմբում է, և այն ավելի թեթև է մյուսներից: Իսկ եթե նժարները չհավասարակշռվեն, ապա կեղծ մետաղադրամը առաջին խմբում է, և այն մյուսներից ավելի ծանր է:

Խնդրի գեղագիտական գրավչությունը հետևում է նրա հետաքրքրությունից և ինքնատիպությունից: Ավելի գրավիչ է նրա լուծումը, ինչը արդյունք է գիտական գեղեցիկի անկանխատեսելիության և նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարման սուբյեկտիվ հատկանիշների դրսևորման:

Հետաքրքրաշարժ խնդիրների մի այլ դաս են կազմում “Գտեք սխալը” վերտառությամբ խնդիրները: Սրանք նման են հնադարի սոփեստություններին, որոնցում սխալը խնամքով քողարկված է: Մեծ մասամբ այդ խնդիրները վերաբերում են դիտարկվող մաթեմատիկական նյութին, և սխալները ստացվում են նյութի մեջ առկա փաստերի սխալ օգտագործման արդյունքում: Կան նաև տրամաբանական սխալներ պարունակող վարժություններ, որոնք հիմնականում ընդգրկված են տրամաբանության հանրահաշվում: Դրանց գրավչությունը նույնպես պայմանավորված է գիտական գեղեցիկի անկանխատեսելիության և նպատակաուղղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարման սուբյեկտիվ հատկանիշների դրսևորումով: Սակայն դրանք բացահայտում են անցած նյութի իմացության մեջ ինչ-որ թերըմբռնում, որի վերացմանն էլ ուղղված է լինում նման խնդիրը: Եվ խնդրի ու նրա լուծման գրավչությունը ուղիղ համեմատական է առարկայի էությունը հասկանալու համար ներդրված ջանքերի չափին:

Տեքստային խնդիրների գեղագիտական գրավչությունը: [22] աշխատանքում դիտարկվում է որոնելու, գտնելու գեղագիտական պահանջմունքների բավարարման գործում մաթեմատիկական կրթության ունեցած դերը: Հարկ է նշել, որ գեղագիտական այդ պահանջմունքները դրսևորվել են մարդկային գործունեության բոլոր բնագավառներում, դրանց բավարարմանն ուղղված մարդկային ջանքերն ու քայլերը դարձել են մարդկային առաջադիմության, քաղաքակրթությունների զարգացման շարժիչ ուժ: Բայց եթե Անտիկ շրջանում հույների որոնման առարկան Միջերկրականի ավազանն էր, Վերածննդի շրջանում մարդկային որոնման մեծագույն նվաճումը Կոլումբոսի կողմից Ամերիկայի հայտնագործությունը, ապա այսօր որոնման առարկա է դարձել տիեզերքը՝ իր անսահման գաղտնիքներով, որոնք կամաց-կամաց բացվում են մարդ-

կային հզոր մտքի գործունեության արդյունքում: Եվ բոլոր բնագավառներում ու բոլոր ժամանակներում առաջադրված խնդիրների լուծման հիմնական միջոցներից մեկը եղել է մաթեմատիկան: Բայց եթե Արքիմեդի տեխնիկական սարքերի կամ Կոլումբոսի նվաճումները հնարավոր դարձնող Կարավելլա նավի ստեղծման համար անհրաժեշտ էին թվաբանական պարզագույն հաշվարկներ, ապա ինքնաթիռի, արբանյակի կամ ժամանակակից տեխնիկական ու գիտական այլ նվաճումների համար անհրաժեշտ էր նոր որակի մաթեմատիկա, մաթեմատիկա, որի ստեղծումը նախորդել է տեխնիկական և գիտական այդ նվաճումներին: Այդ նոր մաթեմատիկայի հիմքում ընկած է հանրահաշիվը, որը թույլ է տալիս մեր կողմից տառերով նշանակված որոնելի մեծությունների մասին իմանալ նաև այլ տեղեկություններ, գտնել դրանք, լուծել առաջադրված խնդիրները:

Օրինակ, դիցուք մեզ հայտնի է երկու մեծությունների գումարը, ասենք՝ 100, և տարբերությունը՝ 40: Ինչպե՞ս գտնենք այդ մեծությունները: Նշանակենք այդ մեծությունները x և y տառերով: Համաձայն մեր իմացած տեղեկության՝ ունենք՝ $x + y = 100$, $x - y = 40$: Ստացված հավասարումներից մեկից գտնելով x -ը և տեղադրելով մյուսի մեջ՝ մենք կստանանք $y = 30$, որից հետո կորոշենք x -ը՝ $x = 70$:

Անշուշտ, դիտարկված խնդիրը մենք կարող էինք լուծել նաև առանց հանրահաշիվի կիրառության: Սակայն մեզ անհրաժեշտ կլիներ մտքի ավելի մեծ լարում: Այդ պատճառով էյնշտեյնը ասում էր, որ գիմնագիտում սովորելու տարիներին իր քեռին պնդում էր, թե հանրահաշիվը լողրերի թվաբանությունն է: Սակայն դա այդպես է առաջին հայացքից: Հիմա փորձենք լուծել ավելի բարդ մի խնդիր:

Պահանջվում է գտնել ուղղանկյունաձև հողամասի կողմերը, եթե գիտենք, որ դրանցից մեկը մյուսից մեծ է՝ ասենք 25 մետրով, իսկ հողամասի մակերեսն էլ 900 քառակուսի մետր է:

Այստեղ արդեն էյնշտեյնի քեռին իրեն չի կարող օգնել, և մեզ անհրաժեշտ է օգտվել հանրահաշիվի միջոցներից: Ուղղանկյան կողմերը նշանակելով x և y տառերով՝ կունենանք՝ $x - y = 25$, $xy = 900$:

Լուծելով հավասարումների այս համակարգը՝ կստանանք խնդրի պատասխանը՝ $x = 45$, $y = 20$:

Հանրահաշիվի միջոցներով և մեթոդներով լուծվում են շատ ավելի բարդ կիրառական խնդիրներ (դրանք կոչվում են նաև տեքստային խնդիրներ), որոնք մոդելավորելիս, այսինքն՝ հանրահաշիվի լեզվով գրառելիս ստաց-

Նման խնդիրների լուծման ընթացքում դրսևորվում են գիտական գեղեցիկի ինքնատիպության, բազմազանությունների միասնության, տրամաբանական խստության հատկանիշները և անսպասելիության, նպատակատուղված, բարդ ու դժվարին խոչընդոտի հաղթահարման սուրբեկտիվ հատկանիշները:

Ինչպես նշվեց վերևում, տեքստային կամ կիրառական խնդիրների գեղագիտական գրավչությունը մեծապես պայմանավորված է նաև նրանց պատումով, դրանց հետաքրքրությամբ: Այս տեսակետից ուշագրավ են Շիրակացու խնդիրները, որոնք նաև պատմություններ են իր ժամանակի նշանավոր մարդկանց ու իրադարձությունների մասին: Դրանց իմացությունը գիտական գեղեցիկի լրացուցիչ երանգներ է հաղորդում խնդրին:

Ապացուցման խնդիրների գեղագիտական գրավչությունը: Ապացուցման խնդիրներին հատուկ են մաթեմատիկական թեորեմների ու նրանց ապացուցումների գեղագիտական գրավչության բոլոր հատկանիշները:

Կառուցման խնդիրների գեղագիտական գրավչությունը: Մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում գեղագիտական արժեքների ձևավորման լայն հնարավորություն են ընձեռում կառուցման խնդիրները: Այն, որ աշակերտը, բացի խնդրի պատասխանը գտնելուց, կոնկրետ գործիքների միջոցով իրականացնում է պահանջվող կառուցումը, լրացուցիչ հուզական լիցք է հաղորդում նրա աշխատանքին: Այստեղ հանդես են գալիս նաև մտածողության հնարքների, հասկացությունների, դրանց հատկությունների, կիրառման, փոխադարձ կապի և մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով գեղագիտականի արտահայտման այլ ձևեր: Ասվածը ցուցադրենք կոնկրետ ու պարզ օրինակի վրա:

Ինչպե՞ս կարող ենք կարկինի և քանոնի օգնությամբ կառուցել շրջանագիծը, եթե տրված է նրա որևէ աղեղը:

Լուծումը: Դիցուք տրված աղեղը պատկերված է գծագրում: Հասկանալի է, որ որոնելի շրջանագիծը կառուցելու համար մեզ անհրաժեշտ է գտնել նրա կենտրոնը: Հետևաբար, մենք պետք է աշխատենք լուծման մեջ ներգրավել այնպիսի գիտելիք, որը կապ է հաստատում շրջանագծի կենտրոնի և աղեղի միջև: Նման գիտելիք է աղեղը ձգող լարի միջնուղղահայացի կենտրոնով անցնելու մասին պնդումը: Բայց մենք ունենք մեկ աղեղ, որը ձգող լարի միջնուղղահայացը կտա կենտրոնով անցնող մեկ ուղիղ: Նման երկրորդ ուղիղը կգտնի աշակերտների մեծ մասը՝ որպես նոր աղեղ ընդունելով, օրինակ, տրված աղեղի կեսը՝ սկսած նրա որևէ ծայրակետից: Այսպիսով, մենք կունենանք երկու ուղիղներ, որոնք կանց-

նեն շրջանագծի կենտրոնով: Դրանց հատման կետն էլ կլինի որոնելի շրջանագծի կենտրոնը:

Այստեղ գեղագիտական տարրը արտահայտում է շրջանագծի աղեղը ձգող լարի միջնուղղահայացը շրջանագծի կենտրոնով անցնելու մասին պնդման կիրառելիությունը և միգուցե նաև դրա կիրառության անսպասելիությունը: Խնդրի լուծումը գտնելուց հետո ուսուցիչը կարող է նրա գեղագիտական կողմը ավելի ընդգծել տրամաբանական խստության գեղագիտական հատկանիշի ներգրավման միջոցով: Նման հնարավորություն է տալիս, օրինակ, հետևյալ հարցադրումը. երկու աղեղները ձգող լարերի միջնուղղահայացները կարո՞ղ են իրար գուգահեռ լինել:

ПРЕКРАСНОЕ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МАТЕМАТИКИ

Г. С. Микаелян

Работа посвящена проблеме эстетического воспитания учащихся в процессе обучения математике. Среди многочисленных работ, имеющих в этом направлении (см. список литературы), она выделяется рядом особенностей. В основу эстетического отношения ставится субъективное отношение, притом - не обязательно бинарное, что типично в психологических исследованиях. В частности, посредством тернарных эстетических отношений объясняются некоторые явления, связанные с эстетическим образованием. Признаки научного прекрасного автор различает по их объективному и субъективному характерам, что позволяет уточнить и расширить возможности восприятия прекрасного. Отметим, например, что без учета субъективного характера эстетического нельзя объяснить диаметрально противоположные эстетические оценки, данные Г. Биргкофом и Г. Айзенком усилиям, применяемым для понимания сущности математического объекта.

Далее, помимо прекрасного исследуются также проявления возвышенного и других эстетических ценностей в сфере математики и математического образования. Рассматривается также проблема формирования основных категорий эстетического воспитания: эстетического восприятия, эстетического развития, эстетического идеала, и т. д. в процессе математического образования обсуждается вопрос художественной правды с точки зрения математического прекрасного. Исследуется связь психических явлений внимания, памяти, потребностей, эмоций, чувств и волевых качеств с процессом обучения математике.

Содержание:

Глава 1. *Основы эстетического воспитания и математическое образование.* § 1. *Эстетическое воспитание и математическое образование.* Эстетическое воспитание, его цели, функции и задачи. Математическое образование и проблема эстетического воспитания. Системный подход к решению проблемы эстетического воспитания в процессе преподавания математики. § 2. *Субъективные отношения.* Субъектность и субъективность. Двустороннее субъективное отношение. Трехстороннее субъективное отношение. § 3. *Субъективный аспект математического прекрас-*

ного. Субъективные и объективные признаки математического прекрасного. Мотивационные признаки научного прекрасного. Познавательные признаки научного прекрасного. § 4. *Объективный аспект математического прекрасного.* Образующие признаки научного прекрасного. Соединяющие признаки научного прекрасного. Логические признаки научного прекрасного. §5. *Внутренняя и внешняя эстетика в математическом образовании.* Внешняя эстетика в математическом образовании. Внутренняя эстетика в математическом образовании. Связь внутренней и внешней эстетик в математическом образовании. § 6. *Эстетические ценности и математическое образование.* Эстетические ценности. Прекрасное, безобразное и математическое образование. Возвышенное, низменное и математическое образование. Комедийное, трагическое и математическое образование.

Глава 2. *Прекрасное в психике личности и математическое образование.*
§ 1. *Эстетические потребности и математическое образование.* Эстетическая потребность и математика. Источники эстетической потребности и математики. Игра в процессе обучения математике. Формирование эстетической потребности в процессе обучения математике. § 2. *Эстетические эмоции в процессе обучения математике.* Прекрасное и эмоционально-чувствительная составляющая эстетического воспитания. Эстетические эмоции в процессе обучения математике. Эмоции ожидания и прогнозирования. Эмоции удовлетворения и радости. Эмоции фрустрации. Эмоции коммуникации. Интеллектуальные эмоции. Прекрасное в эмоциональных ситуациях и математическое образование. §3. *Эстетические чувства в процессе обучения математике.* Эстетические чувства. Чувство удовлетворенности от прекрасного. Чувство симпатии к прекрасному. Эстетическое чувство любви. §4. *Красота внимания и математическое образование.* Проявления внимания и признаки математической красоты. Виды внимания. §5. *Красота памяти и математическое образование.* Проявления внимания и признаки математической красоты. Виды памяти. §6. *Красота воли и математическое образование.* Воля, главные волевые качества и задача их формирования. Целеустремленность. Решительность. Стойкость. Выносливость. Смелость. Самостоятельность. Самообладание. §7. *Красота воображения и математическое образование.* Воображение, его роль в процессе обучения математике. Виды воображения. Развитие воображения.

Глава 3. *Категории эстетического воспитания и математическое образование.* § 1. *Эстетическое отношение и математическое образование. Двустороннее эстетическое отношение. Трехстороннее эстетическое отношение. Эстетическое отношение в процессе обучения математике.* §2. *Эстетическое познание и математическое образование. Эстетическое восприятие и математическое образование. Эстетическое развитие и математическое образование. Эстетическая правда и математическое образование.* §3. *Эстетическая оценка и математическое образование. Эстетический вкус. Эстетический вкус и математическое образование. Эстетический идеал и математическое образование. Эстетическая оценка и математическое образование.* §4. *Эстетическая эмоции и чувства процесса математического образования. Эстетические эмоции и математическое образование. Эстетические чувства и математическое образование.*

Глава 4. *Красота архитектурных стилей математического образования.* §1. *Методы познания и красота математического образования. Эмпирические методы познания. Эстетическая привлекательность методов анализа и синтеза в математическом образовании. Эстетическая привлекательность методов обобщения и конкретизации в математическом образовании. Абстракция и конкретизация эстетической привлекательности математических методов в образовании. Эстетическая привлекательность методов сравнения в математическом образовании. Эстетическая привлекательность метода аналогии в математическом образовании. Сочетание научных методов познания.* §2. *Эстетическая привлекательность методов обучения математике. Аксиоматический метод. Проблемное обучение. Эвристический метод. Математическое моделирование. Другие методы обучения.* §3. *Эстетическая привлекательность методов дедукции и индукции. Эстетическая привлекательность метода индукции. Эстетическая привлекательность метода дедукции. Математическая индукция и ее эстетическая привлекательность.*

Глава 5. *Эстетическая привлекательность процесса образования математике.* §1. *Проблемы математического образования и формирование прекрасного. Взаимоотношения математики со школьным ее курсом и проблема формирования ценностей. Цели математического образования и проблема формирования ценностей. Функции математического образования и проблема формирования ценностей. Актуальность математического образования и проблема формирования ценностей.* §2. *Формирование прекрасно-*

го в процессе обучения математических понятий. Проблема эстетической привлекательности математических понятий. Выражение эстетической привлекательности математических понятий через их мотивации. Выражение эстетической привлекательности математических понятий через их определения. Выражение эстетической привлекательности математических понятий через их освоение. Выражение эстетической привлекательности математических понятий через их применение. §3. *Формирование прекрасного в процессе обучения математических теорем.* Объективные признаки прекрасного математических теорем. Объективные признаки прекрасного математических теорем. Внутренние и внешние проявления прекрасного в процессе обучения математическим теоремам. Эстетическая привлекательность теорем и мотивации к обучению. Выражение эстетической привлекательности теорем путем их практического применения. §4. *Формирование прекрасного в процессе обучения математических доказательств.* Математика, как искусство доказательства. Что такое доказательство? Архитектура математических доказательств. Эстетическая привлекательность математических доказательств. §5. *Формирование прекрасного в процессе обучения математическим задачам.* Эстетическая привлекательность математических задач. Эстетическая привлекательность математической задачи, когда она рассматривается в качестве игры. Функции задач и их эстетическая привлекательность. Эстетическая привлекательность различных видов математических задач.

BEAUTIFUL AND EDUCATIONAL POTENTIAL OF MATHEMATICS

H. S. Mikaelian

The work is devoted to aesthetic education of students in learning mathematics. Among the many works available in this area (see. Extensive bibliography), it stands out a number of features.

At the heart of the aesthetic relation is put subjective attitude, though - not necessarily a binary that customary subsequent in psychological research. In particular, some phenomena related to aesthetic education are explained by means of ternary aesthetic relationships.

Signs of scientific wonderful author differ in their objective and subjective nature, which allows to refine and enhance the capacity of perception of beauty. Note, for example, that without subjective aesthetic nature, one can not explain the opposite aesthetic evaluation data G. Birgkof and T Eysenck to efforts applied to the understanding the mathematical object.

Further, besides the beautiful, other expressions of the sublime and of other aesthetic values in mathematics are investigated in order to understand the nature of the mathematical object.

We also consider the problem of formation of the main categories of aesthetic education: aesthetic perception, aesthetic development, the aesthetic ideal, and others in the process of mathematical education discussion of artistic truth in terms of mathematical beauty.

We investigate the connection of psychic phenomena of attention, memory, needs, emotions, feelings and volitional qualities of the process of teaching mathematics.

Contents:

Chapter 1. The Fundamentals of aesthetic education and mathematics education. § 1. *Aesthetic education and mathematics education*. Aesthetic education, its objectives, functions and tasks. Mathematical Education and the problem of aesthetic education. The system approach in solving the problem of aesthetic education in the teaching mathematics. § 2. *The subjective relationship*. Subjectivity and objectivity. Bilateral subjective relation. Tripartite subjective relation. §3. *Subjective aspect of mathematical beauty*. Subjective and an objective signs of mathematical beauty. Motivational signs of scientific beauty. Cognitive symptoms of scientific beauty. Mental signs of scientific beauty. § 4. *Objective aspect of mathematical beauty*. Forming characteristics of scientific

beauty. Joining signs of scientific beauty. Logic signs of scientific beauty. §5. *Internal and external aesthetics in mathematics education*. External aesthetics in mathematics education. Internal aesthetics in mathematics education. Communication internal and external aesthetics in mathematics education. § 6. *Aesthetic value and mathematical education*. Aesthetic values. Beautiful, ugly, and mathematics education. Upland, lowland and mathematics education. Comedy, tragic, and mathematics education.

Chapter 2. Great in the psychic of the individual and mathematics education.

§ 1. *The aesthetic needs and mathematics education*. Aesthetic needs and mathematics. Sources of aesthetic needs and mathematics. The game is in the process of teaching mathematics. Formation of aesthetic needs in learning mathematics. § 2. *The aesthetic emotion in learning mathematics*. Beautiful and emotionally-sensitive component of the aesthetic education. Aesthetic emotions in learning mathematics. Emotions expectations and projections. The emotions of satisfaction and joy. Emotions frustration. Emotions communication. Intelligent emotions. Beautiful in emotional situations and mathematics education. §3. *Aesthetic sense in learning mathematics*. Aesthetic sense. The feeling of satisfaction from the beautiful. Feeling sympathy for the beautiful. The aesthetic feeling of love. §4. *Beauty attention and mathematical education*. Demonstration of attention and signs of mathematical beauty. Types of attention. §5. *Beauty memory and mathematical education*. Demonstration of attention and signs of mathematical beauty. Types of memory. §6. *Beauty will and mathematics education*. Will, the main task will power and their formation. Purposefulness. Decisiveness. Persistence. Endurance. Courage. Independence. Composure. §7. Beauty of imagination and mathematical education. Imagination, its role in the process of learning mathematics. Types of imagination. Development of imagination.

Chapter 3. Categories of aesthetic education and mathematics education. § 1. *The attitude relation and mathematics education*. Bilateral aesthetic relation. Tripartite aesthetic relation. The aesthetic relation to learning mathematics. §2. Aesthetic knowledge and mathematical education. Aesthetic perception and mathematical education. Aesthetic development and mathematical education. Aesthetic truth and mathematical education. §3. *Aesthetic assessment and mathematical education*. Aesthetic taste. The aesthetic taste and mathematics education. The aesthetic ideal and mathematical education. Aesthetic assessment and mathematical education. §4. *Aesthetic emotions and feelings of*

mathematical education. Aesthetic emotions and mathematical education. Aesthetic sense and mathematical education.

Chapter 4. Beauty architectural styles of mathematics education. §1. *Methods of knowledge and beauty of mathematics education.* Empirical methods of cognition. The aesthetic appeal of methods of analysis and synthesis in mathematics education. The aesthetic appeal of methods of synthesis and specificity in mathematics education. Abstract and concrete definition of the aesthetic appeal of mathematical methods in education. Aesthetic attractive Flow rate comparison methods in mathematics education. The aesthetic appeal of the method of analogy in mathematics education. The combination of scientific methods of knowledge. §2. *The aesthetic appeal of methods of teaching mathematics.* Axiomatic method. Problem based learning. Heuristic method. Mathematical modeling. Other training methods. §3. *The aesthetic appeal of methods of induction and deduction.* The aesthetic appeal of the method of induction. The aesthetic appeal of the method of deduction. Induction and its aesthetic appeal.

Chapter 5. The aesthetic appeal of the formation of mathematics. §1. *Problems of mathematical education and the formation of the fine.* The relationship with the school mathematics course and the problem of values formation. The goals of mathematics education and the problem of the values formation. The functions of mathematical education and the problem of the values formation. Relevance of mathematics education and the problem of the values formation. §2. *Formation of the finest in the process of learning mathematical concepts.* The problem of the aesthetic appeal of mathematical concepts. Aesthetically appealing expression of mathematical concepts through their motivation. Aesthetically appealing expression of mathematical concepts by their definitions. Aesthetically appealing expression of mathematical concepts through their development. Aesthetically appealing expression of mathematical concepts through their use. §3. *Formation of the finest in the process of learning mathematical theorems.* Objective evidence of beautiful mathematical theorems. Internal and external manifestations of beauty in the process of learning mathematical theorems. The aesthetic appeal of theorems and motivation to learn. Expression of aesthetic appeal theorems by their practical application. §4. *Formation of the finest in the process of learning mathematical proofs.* Mathematics as the art of the evidence. What is the proof? Architecture of the mathematical proofs. The aesthetic appeal of mathematical proofs. §5.

Formation of the finest in the process of learning mathematical problems. The aesthetic appeal of mathematical problems. The aesthetic appeal of mathematical problems, when it is considered as a game. The functions and tasks of its aesthetic appeal. The aesthetic appeal of different types of mathematical problems.

Գրականություն

1. Ա. Ավագյան, Հիշողության երևույթը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում, Մաթեմատիկան դպրոցում, 2009, №5-6:
2. Ա. Ա. Բալյան, Էսթետիկայի դաստիարակության տեսություն, Երևան, 1980:
3. Մ. Ա. Դանիելյան, Վ. Հ. Միքայելյան, Հ. Ս. Միքայելյան, Հոգեկան երևույթները մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում, 1. Ուշադրություն, Մաթեմատիկան դպրոցում, 2000, №5-6:
4. Յա. Ա. Կոմենսկի, Մեծ Դիդակտիկա, Երևան, 1960:
5. Ս. Է. Հակոբյան, Երկրաչափություն 10, Երևան, 2010:
6. Վ. Ա. Հովսեփյան, Գեղագիտական ուսմունքների պատմություն, Եր., 1979:
7. Հ. Ս. Միքայելյան, Հանրահաշվի ուսուցման հիմնահարցերը, Երևան, Էդիթ պրինտ, 2003:
8. Հ. Ս. Միքայելյան, Բարձրագույն հանրահաշվի դասընթաց, հ. 1, Երևան, 2004, 352 էջ:
9. Հ. Ս. Միքայելյան, Հանրահաշիվ 7, Հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Երևան, Էդիթ պրինտ, 2006:
10. Հ. Ս. Միքայելյան, Հանրահաշիվ 8, Հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Երևան, Էդիթ պրինտ, 2007:
11. Հ. Ս. Միքայելյան, Հանրահաշիվ 9, Հանրակրթական դպրոցի դասագիրք, Երևան, Էդիթ պրինտ, 2008:
12. Հ. Ս. Միքայելյան, Մաթեմատիկական կրթությունը և սովորողների հոգեկան կոփումը, Մանկավարժություն, 2010, №1:
13. Հ. Ս. Միքայելյան, Ազգային արժեքի մասին, Մարդ և հասարակություն, 2012, №4:
14. Հ. Ս. Միքայելյան, Բարոյական արժեքները և մաթեմատիկայի կրթական ներուժը, Էդիթ պրինտ, 2011, 186 էջ:
15. Հ. Ս. Միքայելյան, Մաթեմատիկան և ճարտարապետությունը, Մաթեմատիկան դպրոցում, 2012, №4:
16. Հ. Ս. Միքայելյան, Գեղեցիկի գիտական բաղադրիչները, Մաթեմատիկան դպրոցում, 2012, №5:
17. Հ. Ս. Միքայելյան, Մաթեմատիկան և գրականությունը, Հայոց լեզու և գրականություն, 2012, №7:

18. Հ. Ս. Միքայելյան, Համաչափությունը խաչքարերում, Մաթեմատիկան դպրոցում, 2013, №1:
19. Հ. Ս. Միքայելյան, Կամային որակների ձևավորումը և մաթեմատիկական կրթությունը, Մարդ և հասարակություն, 2013, №2:
20. Հ. Ս. Միքայելյան, Գեղեցիկը և մաթեմատիկան, Մաթեմատիկան դպրոցում, 2013, №3:
21. Հ. Ս. Միքայելյան, Մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդների գեղագիտական գրավչությունը, Մաթեմատիկան դպրոցում, 2013, №4:
22. Հ. Ս. Միքայելյան, Գեղագիտական պահանջմունքները և մաթեմատիկական գործունեությունը, Մարդ և հասարակություն, 2013, №4:
23. Հ. Ս. Միքայելյան, Գեղագիտական հույզերը և մաթեմատիկական կրթությունը, Մաթեմատիկան դպրոցում, 2013, №5:
24. Հ. Ս. Միքայելյան, Վեհը, մաթեմատիկան և մաթեմատիկական կրթությունը, Արժեքների ձևավորումը և մաթեմատիկական կրթությունը. գիտամեթոդական հոդվածների ժողովածու, №1, էջ 94-106:
25. Հ. Ս. Միքայելյան, Գեղեցիկը, Մաթեմատիկան և կրթությունը, մաս 1, Գեղեցիկը և մաթեմատիկան, Էդիթ Պրինտ, Երևան, 2014:
26. Հ. Ս. Միքայելյան, Մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ հատկանիշները, «Մաթեմատիկան դպրոցում», №1, 2014:
27. Հ. Ս. Միքայելյան, Մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ հատկանիշները, «Մաթեմատիկան դպրոցում», №2, 2014:
28. Հ. Ս. Միքայելյան, Մաթեմատիկական օբյեկտների ներքին և արտաքին գեղագիտությունը, «Մաթեմատիկան դպրոցում», №3, 2014:
29. Հ. Ս. Միքայելյան, Գեղագիտական զարգացումը և մաթեմատիկական կրթությունը, «Մաթեմատիկան դպրոցում», №1, 2015:
30. Հ. Ս. Միքայելյան, Գեղագիտական ճաշակը և մաթեմատիկական կրթությունը, «Մարդ և հասարակություն», №1, 2015:
31. Հ. Ս. Միքայելյան, Ա. Տ. Մկրտչյան, Մաթեմատիկայի դասընթացում տրամաբանության տարրերի ներառումը և արժեքների ձևավորման խնդիրը, Արժեքների ձևավորումը և մաթեմատիկայի կրթական ներուժը. գիտամեթոդական հոդվածների ժողովածու, №1, Երևան, 2014, էջ 107-126:
32. Լ. Ս. Ներսիսյան, Կրթություն և գեղագիտություն, Երևան, Զանգակ-97, 2002. 158 էջ:
33. Ա. Շիրակացի, Մատենագիտություն, Երևան, 1979:

34. Գ. Բ. Պետրոսյան, Միջնադարյան Հայաստանի մաթեմատիկայի պատմությունից, Երևան, 1986:
35. Հ. Պետրոսյան, Անանիա Շիրակացու «Խրախճանականքը» և միջնադարյան խնջույքը, Հայաստանը և քրիստոնյա Արևելքը, Երևան, 2000, էջ 356-361:
36. Շ. Պերպերյան, Արժեքաբանություն կամ արժեքներու իմաստասիրություն, Բեյրութ, 1976:
37. Մ. Մ. Ստեփանյան, Մաթեմատիկայի հայկական դասագրքերը և դասավանդումը հայկական դպրոցներու 19-րդ դարի երկրորդ կեսում, Ատենախոսություն, մ. գ. թ, Երևան, 1973, 198 էջ:
38. Հ. Տևն, Գեղարվեստի փիլիսոփայությունը, Երևան-Մոսկվա, 1936:
39. Ж. Адамар Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М., 1970.
40. А. И. Азевич, Гуманитарно - интегративный подход в обучении математике в средней школе: Дис. ... канд. пед. наук. - М., 1995.
41. А. И. Азевич, Двадцать уроков гармонии, Гуманитарноматематический курс, М., 1998.
42. Г. Айзенк, Проверьте свои способности, М., 1972, 177.
43. Г. Айзенк, Узнай свой собственный коэффициент интеллекта, Н-Новгород, 1994.
44. Н. И. Аринина, Уроки прекрасного, Из опыта работы, М., Просвещение, 1983.
45. Аристотель. Поэтика. М. 2008.
46. Н. А. Бердяев, Самопознание, М., 1990.
47. Э. Бёрк, Филос. исследование относительно возникновения наших понятий о возвышенном и прекрасном, М., 1979.
48. Г. Биркгоф, Математика и психология. М., 1977.
49. И. В. Блауберг, Краткий словарь по философии, изд. 2. М., 1970.
50. В.Г. Болтянский, Математическая культура и эстетика, Математика в школе. 1982, №2.
51. Большая советская энциклопедия, Третье издание, М., 1969-1978.
52. Большой психологический словарь. М., Под ред. Б.Г. Мещерякова, акад. В.П. Зинченко.
53. Большой толковый словарь по культурологии. Кононенко Б. И.. М. 2003.
54. Ю. Б. Боров, Основные эстетические категории, М., 1960.

55. Ю. Б. Боров, Эстетика, М., 2002.
56. В. Бранский, Искусство и философия, М., 1999.
57. Н. Бурбаки, Архитектура математики. Очерки истории математики, М., 1963.
58. О. В. Буткевич, Красота: природа, сущность, формы, Л., 1983.
59. Ф. Бэкон, Сочинения, т. 2, 1978.
60. Н. А. Васютинский, Золотая пропорция. М., 1990.
61. И. И. Винкельман, Избранные произведения и письма, М., 1935.
62. И. И. Винкельман, История искусства древности, Равель, 1890.
63. Л. да Винчи. Книга о живописи, М., 1934.
64. Л. да Винчи. Избранные произведения, М., 2000.
65. М. Витрувий, Десять книг об архитектуре, М., Искусство, 1936.
66. А. В. Волошинов, Математика и искусство, М., 2000.
67. М. Волькенштейн, Красота науки, Наука и жизнь. 1988. №9.
68. В. М. Волькенштейн, Опыт современной эстетики, М., 1931.
69. Ворингер В., Абстракция и одухотворение. В сборнике Мигунов С. А., Хренов Н. А., Эстетика и теория искусств 20-го века. Хрестоматив, М., 2008.
70. В. Вундт, Основы физиологической психологии, в трех томах, М., 1912.
71. Л. С. Выгодский, Психология искусства, М., Ростов н/Дону, 1998.
72. Н. Н. Васютинский, Золотая пропорция, М., Молодая гвардия, 1990.
73. Г.-Х. Гадамер Истина и метод: Основы философской герменевтики. М., 1988.
74. И. Гартман, Эстетика, М., 1958.
75. Г. Гегел, Эстетика, в 4-х т., М., 1968-1973.
76. В. Гейзенберг, Значение красоты в точной науке, Гейзенберг В. Шаги за горизонт. М., 1987. С.268-283.
77. Г. Генцен Исследования логических выводов, Математическая теория логического вывода. М., 1967. С. 9-74.
78. А. Д. Гетманова, Учебник по логике, М., 1995.
79. С. Ю. Головин. Словарь практического психолога. Минск, 1998.
80. И.Ф. Гончаров, Эстетическое воспитание школьников средствами искусства и действительности, М., 1986.
81. М. А. Городилова, О природе математической абстракции, Хабаровск, 2003.

82. Э. Г. Готман, Скопец З.А. Задача одна - решения разные. М., 2000.
83. В. С. Готт, Симметрия и асимметрия. М., 1965.
84. Я. И. Груденов, Изучение определений, аксиом, теорем; Пособие для учителей. М., 1981.
85. А. В. Гулига, Что такое эстетика, М., Просвещение, 1987.
86. Н. В. Гусева, Теоретические и методические основы раскрытия эстетического потенциала школьного курса математики в 5-6 классах. Дисс. к.п.н, Арзамас, 1999.
87. М. А. Давидов, Прекрасное в математике, Педагогическое образование, 1994, №3.
88. Г. В. Дорофеев, Гуманитарно-ориентированный курс - основа учебного предмета "математика" в общеобразовательной школе, Математика в школе, 1997, №4.
89. Б. А. Дышинский, Методические этюды в задачах, Роль и место задач в обучении математике. Вып.2. М., 1973. - С.105-123.
90. Дж. Дьюи, Демократия и образование. М.: Педагогика, 2000.
91. Дж. Дьюи, Психология и педагогика мышления. (Как мы мыслим). М., 1999.
92. В. А. Жмуров, Большая энциклопедия по психиатрии, 2-е издание. 2012.
93. А. Л. Жохов, Как помочь формированию мировоззрения школьников: Книга для учителя и не только для него. Самара: Изд-во СамГПУ, 1995.
94. М. В. Загоскин О ценностных ориентациях в психологической наке. [Электронный ресурс]: URL: <http://www.vlad-sadovsk.chat.ru/magazin4/article5.htm>.
95. Занимательные задачи /Сост. Монжиевская В.В., ч.3. Иркутск, 1993.
96. И. Г. Зенкевич, Эстетическое воспитание на уроках математики: Дисс. ... канд. пед. наук, 1971.
97. И. Г. Зенкевич, Эстетическое урока математики: Пособие для учителей, М., 1981.
98. Т. А. Иванова, Гуманитаризация общего математического образования: Монография. Нижний Новгород, 1998.
99. А. А. Ивин, Искусство правильно мыслить, М., Просвещение, 1990.
100. Е. И. Игнатъев, В царстве смекалки. - М.: Наука, 1982.
101. К. Э. Изард, Психология эмоций, С.-П., 1999.

102. Е. П. Ильин, Эмоции и чувства, 2-е издание, М., С-Петербург, 2013.
103. Н. Б. Истомина Методика обучения математике в начальных классах. М.: LINKA - PRESS, 1992. - 251 с.
104. И. Кант, Сочинения в 6 т., т. 1- 6. М., Мысль, 1963.
105. И. Кант, Критика способности суждения, О возвышенном, 1 в. н. э., рус. пер. 1966.
106. М. Кац, С. Улам, Математика и логика: Ретроспектива и перспектива, М., 1971.
107. М. Клайн, Математика, Поиск истины, М., 1988,
108. В. В. Клёнина, Эстетическое отношение к искусству: вопросы теории и практики, Эстетическое образование: проблемы и перспективы, Материалы международной научнопрактической конференции (15-16 ноября 2007 г., г. Брест), Минск, 2007.
109. С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., ИЛ, 1957.
110. О. А. Кобалия, Эстетическое воспитание при обучении геометрии в средней школе: Дис. ... канд. пед. наук. - М., 1985. - 160 с.
111. О. А. Кобалия, Эстетическое воспитание при обучении геометрии в средней школе, Дисс. ... канд. пед. наук, М., 1985.
112. Н. И. Кованцов, Математика и романтика. - Киев, 1976.
113. В. Т. Ковешников, Элементы эстетического воспитания в преподавании математики. Дис. ... канд. пед. наук. М., 1969.
114. К. Г. Кожабаев, О воспитательной направленности обучения математики в школе, М., 1988.
115. Н. И. Козлов, nkozlov.ru/library/samorazvit/d4147/#.VaEFBvamqqko.
116. А. Н. Колмогоров, Паркеты из правильных многоугольников, Квант, 1976, №3.
117. С. В. Котина, Одна из причин непреходящей эстетической ценности математики, Философские исследования. 1998. №4. С.172-195.
118. С. В. Котина, Принцип красоты в системе методологических регулятивов естественно - научного познания, Философские науки. 1989. №11. С. 110-117.
119. Б. И. Кочубей, Е. В. Новикова, Эмоциональная устойчивость школьника, М., 1988.
120. Краткий словарь по эстетике, CopyrightC, 2012-2015.
121. О. А. Кривцун, Эстетика: Учебник. М., 2000.

122. В. А. Крутецкий, Психология математических способностей школьников. М., 1968.
123. Н. И. Крюковский, Логика красоты, Минск, Наука и техника, 1965.
124. В. Т. Кудрявцев, Проблемное обучение: истоки, сущность, перспективы, М., 1991.
125. Р. Курант, Г. Роббинс, Что такое математика? М., 2001.
126. К. Левитин, Геометрическая рапсодия, М., Знание, 1984.
127. Ф. Лезан, Развитие математической способности, М, 1989.
128. Г. Лейбниц, Соч. в 4-х тт., М., 1982.
129. Е. В. Ликсина, Подготовка учителя к реализации эстетического воспитания в процессе обучения математике, Дисс.... к. п. н., Пенза, 2004.
130. Т. Липпс, Эстетика, М., 2006.
131. П. Локхард, Плач математика, WWW.livelib.ru/book/1000487179.
132. Л. М. Лоповок, Тысяча проблемных задач по математике. М. 1995.
133. А. Ф. Лосев, Музыка как предмет логики, Лосев А.Ф. Форма-Стиль-Выражение. М., 1995.
134. А. Ф. Лосев, Шестаков В. П., История эстетических категорий, М., 1965.
135. Л. И. Лурье, Математическое образование в пространстве эстетического опыта, Образование и наука, 2006, №6.
136. А. Маслоу, Дальние пределы человеческой психики, М., 1997.
137. А. Г. Мерзляк, Полонский В.Б., Якир М.С. Неожданный шаг или 113 красивых задач. Киев, 1993.
138. Е. Ю. Миганова, Эстетические аспекты подготовки будущих учителей математики, Гуманитаризация среднего и высшего математического образования: методология, теория и практика. ч.2. Саранск, 2002.
139. А. Мигдал, О красоте науки, Наука и жизнь. М., 1983. №3, С.59-65.
140. В. Л. Миньковский, Об элементах эстетического воспитания на уроках математики, Математика в школе, 1963, №4.
141. Н. Н. Моисеев, Человек и ноосфера, М., Молодая гвардия, 1990.
142. Ш. Монтескье, Избранные произведения, М., 1955:
143. Морозов А. В. Эвристические методы решения творческих задач. <http://www.i-u.ru/>.
144. И. В. Незовибатько, Эмоции, чувства, действия, М., 2004.
145. Б. М. Неменский, Мудрость Красоты -О проблемах эстетического воспитания: книга для учителя, М., 1981.

146. И. Л. Никольская, С. В. Варфоломеева, Воспитательные задачи обучения математики: Развитие мышления и речи, М., Просвещение, 1985.
147. Новая философская энциклопедия: В 4-х тт., Под редакцией В. С. Степина, М., 2001.
148. Новейший философский словарь, Минск, 1998.
149. С. И. Ожегов, Н. Ю. Шведова, Толковый словарь русского языка, М., 1992.
150. И. А. Орбели, Вопросы и решения вартапета Анания Ширакаци, армянского математика 7-го века, "Избранные труды", Ереван, 1963.
151. Ю. К. Орлов, Невидимая гармония, Число и мысль. Сб. Вып.3. М., 1980.
152. Г. Б. Остер, Задачник. Ненаглядное пособие по математике, М., 1992.
153. Д. Пидоу, Геометрия и искусство, М., Мир, 1979.
154. Платон. Федр. Тимей. Гиппий Большой. Сочинения в 4 томах. М. 1994.
155. Д. Пойа, Как решать задачу.- М.-. Учпедгиз, 1961.
156. Д. Пойа, Математическое открытие. Решение задач: Основные понятия, изучение и преподавание, М., 1976.
157. Г. Н. Попов Исторические задачи по элементарной математике. М., 1999.
158. М. М. Постников, Теория Галуа, М., 1963.
159. Проблемы геометрического образования на современном этапе. Псков, 2001.
160. Псевдо-Лонгин, О возвышенном, 1 в. н. э., рус. пер. 1966.
161. Психологический словарь, psychology.net.ru/dictionaries/psy.html/.
162. Психология. Словарь/ Под общ. ред. А. В. Петровского, М.Г.Ярошевского. М., 1990.
163. А. Пуанкаре, Математическое творчество, Юрьев (Тарту), 1909.
164. А. Пуанкаре, Наука и метод, М., 1983.
165. Г. Радемахер, Теплиц О. Числа и фигуры. Опыты математического мышления. М., 1966.
166. Б. Рассел, Искусство мыслить, М., Идея-Пресс: Дом интеллектуал. кн., 1999.
167. А. В. Репринцев, Эстетическое отношение личности к действительности: сущность, структура, формирование. Курск: 2000.

168. М. А. Родионов, Мотивация учения математике и пути ее формирования, Саранск, 2001.
169. М. А. Родионов, Е. В. Ликсина, Эстетическая направленность обучения и пути ее актуализации, Пенза, 2003.
170. М. А. Родионов, Мотивация учения математике, От теоретического осмысления к практической реализации, Saarbrucken 2012.
171. М. А. Родионов, Актуализация эстетических мотивов учебно-поисковой деятельности школьников в процессе обучения математике, Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского, 2013, N5.
172. Ю. М. Романенко, Философские и эстетические аспекты математического знания, Дисс. ... к. ф. н., М., 2005.
173. Российская педагогическая энциклопедия, Гл. ред. В. В. Давидов, т. 2, М., 1999.
174. Н. Л. Рощина, Формирование эстетического вкуса учащихся в процессе решения планиметрических задач, Дисс. на соиск. канд.пед. наук, М., 1998.
175. Г. И. Рузавин, О природе математического знания, М., 1968.
176. Ж. Ж. Руссо, Об искусстве. М.- Л., 1959.
177. О. А. Саввина, Эстетический потенциал истории математики, Математика в школе. 2001, №3.
178. Г.И. Саранцев, Методология методики обучения математике, Саранск, 2001.
179. Г. И. Саранцев, Эстетическая мотивация и обучение математике. Саранск, 2003.
180. Г. И. Саранцев, Общая методика преподавания математики: Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов. Саранск, 1999.
181. Г. Селье, Стресс без дистресса, М., 1979.
182. И. Н. Сергеев, Олехник С. Н., Гашков С. Б. Примени математику. М. 1989.
183. М. Н. Сизова, Самостоятельное использование учащимися аналогии как средства учения / Развивающее обучение математике. Межвузовский сборник научных статей. Пенза, Изд-во Пензенского гос. пед. университета, 1999.

184. М. Н. Сизова, Преемственность в формировании аналогии при обучении математике в начальных и 5-6 классах средней школы, дисс. ... канд. пед. наук, Самара, 1999, 186 с.
185. В. А. Сластенин, Г. И. Чижакова, Введение в педагогическую аксиологию, М., 2003.
186. Словарь. Ключевые понятия, термины, актуальная лексика. М.: НМЦ СПО. С.М. Вишнякова. 1999-2003.
187. Ч. П. Сноу, Две культуры, М., Прогресс, 1973.
188. Современные концепции эстетического воспитания: (Теория и практика)/ Институт философии РАН; Отв. ред. Н.И.Киященко. М., 1998.
189. У. У. Сойер, Прелюдия к математике. М.: Просвещение, 1972.
190. А. В. Соколова, И. Г. Зенкевич, Воспитание эстетического восприятия математики, Сб. статей, Сост. А. В. Соколова и др., М., 1979.
191. Б. Спиноза. Избранные произведения М., 1957.
192. А. П. Стахов, Гармония мироздания и золотое сечение: древнейшая научная парадигма и ее роль в современной науке, математике и образовании, Часть 1, "Академия Тринитаризма", М., Эл. N77-6567, публ. 12840, 19.01.2006.
193. Л. Н. Столович, Красота. Добро. Истина. Очерк истории эстетической аксиологии, М., 1994.
194. Л. Н. Столович, Природа эстетической ценности, М., 1972.
195. А. А. Столяр, Педагогика математики. Мн.: Высшая школа, 1974.
196. А. К. Сухотин, Соотношение критериев простоты и истинности знания, Актуальные проблемы диалектической логики. Алма-Ата, 1971.
197. Н. Ф. Талызина, Управление процессом усвоения знаний. М.: Изд-во Московского ун-та, 1975.
198. А. Тарский, Введение в логику и методологию дедуктивных наук, М., 1948.
199. И. Л. Тимофеева, Методическая система обучения студентов педагогических вузов математической логике на основе теории естественного вывода, Дисс. на соиск. уч. ст. д. п. н., М., 2005.
200. В. Тихомиров, О значении математики и целей математического образования, Математика в школе, 2007, №4.

201. Л. Н. Толстой. Что такое искусство? Собрание сочинений в 22 т. М., 1983. Т. 15.
202. А. Н. Уайтхед, Приключение идей, М., Ифран, 2009.
203. А. И. Уемов, Аналогия в практике научного исследования. Из истории физико-математических наук. М.: Изд-во «Наука», 1970, - 264 С.
204. В. А. Успенский, Апология математики, М., 2009.
205. К.Д. Ушинский, Сочинения. М., 1950.
206. А. М. Федь, Эстетическое воспитание на уроках по основам наук. Киев, 1984.
207. Е. Л. Фейнберг, Две культуры: интуиция и логика в искусстве и науке, М., 1992.
208. Г. Фельсер, Шесть признаков для симпатии, Psyfactor.org/lib/sympathy2.htm.
209. Философия: Энциклопедический словарь.— М.: Гардарики. Под редакцией А.А. Ивина. 2004./:
210. Философия: Энциклопедический словарь. Под редакцией А. А. Ивина. М., 2004.
211. Философский энциклопедический словарь, Гл. редакция: Л.Ф. Ильичёв, П. Н. Федосеев и др., М., 1983.
212. Э. Финк, Основные феномены человеческого бытия. Проблемы человека в западной философии, М., 1988, с. 357-402.
213. Н. И. Фирстова, Эстетическое воспитание при обучении математике в средней школе. Дис. ... канд. пед. наук. М., 1999.
214. А. А. Френкель, И. Бар-Хиллел, Основания теории множеств, м., Мир, 1968.
215. Л. М. Фридман, Логико-психологический анализ школьных учебных задач. М., 1977.
216. Л. М. Фридман, Теоретические основы методики обучения математике: Пособие для учителей, методистов и педагогических высших учебных заведений. М., 1998.
217. Э. Фромм, Искусство любить, М., 1990.
218. Г. Харди, Апология математика, Ижевск, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000.
219. Г. Харди, Извинения математика, М., 1966, №5, С. 32-36.
220. Ф. Хатчесон, Исследование о происхождении наших идей крас-оты и добродетели. М., 1979.

221. Ф. Хатчесон, Смит А. Эстетика. М., 1973.
222. И. Хёйзинга, Ното Ludens, Человек играющий, М., 2011.
223. У. Хогарт, Анализ красоты, Л., Искусство, 1987.
224. А. С. Ходей, Оценки и ценности, <http://library-of-materialist.ru/appraciations.htm>.
225. А. М. Цатурян, Методологический принцип симметрии в курсе физики средней школы, Дисс. ... кандидата пед. Наук, Санкт-Петербург, 1991.
226. М. Т. Цицерон. Философские трактаты, М., Наука, 1985.
227. Н. З. Чавчавадзе, К специфике истины в искусстве, Философия, культура, человек, Тб., 1988.
228. О. В. Черник, Развитие эстетической воспитанности учащихся при обучении математике. Дисс. На соиск. К.п.н., Киров, 2003.
229. Н. Г. Чернышевский, Избранные философские сочинения, т. 1, М., 1950.
230. Я. Шатуновский, Математика как изящное искусство и ее роль в общем образовании, Математика в школе. 2001.- N3.
231. В. П. Шестаков, Гармония как эстетическая категория, М., Наука, 1973.
232. А. Шефтсбери, Эстетические опыты, М, 1975.
233. Ф. Шиллер, Идеи эстетического воспитания, Т.2. М., 1973.
234. Ф. Шиллер, Собрание сочинений в 7 томах, 1955-1957, т. 6.
235. Ф. Шиллер. Статьи по эстетике, М., 1935.
236. А. Н. Ширяков, Эстетика арифметической задачи, Математика в школе. 1982. №2.
237. В. С. Шишов, Арифметика, геометрия, гармония, ... М., 2000.
238. С. И. Шохор-Троцкий, Методика арифметики, М.-Л., 1935.
239. Ю. А. Шрейдер, Равенство. Сходство. Порядок. М., 1971.
240. А. Н. Щиряков, Эстетика математической задачи, Математика в школе, 1982, №2.
241. Энциклопедический словарь педагога. Екатеринбург. В. С. Безрукова. 2000.
242. Энциклопедический словарь. М., 2009.
243. Энциклопедический словарь по психологии и педагогике. М., 2013.
244. Эрдниев П.М. Аналогия в математике. М., Знание, 1970.

- 245. Эрштейн Л. Б. Запретная теория ценностей: психологические и социологические следствия представления ценностей как динамических запретов. - СПб, 2008.
- 246. Эстетика: Словарь. М. Политиздат. Под общ. ред. А. А. Беляева, 1989.
- 247. Эстетическая культура и эстетическое воспитание: Книга для учителя, Сост. Лабковская. М., 1983.
- 248. Эстетическое воспитание в школе: (Вопросы системного подхода)/ Под ред. Б.Т. Лихачева.- М., 1980.
- 249. М. С. Якир, Что такое красивая задача?, Математика в школе.- 1989. - №6.
- 250. П. М. Якобсон, Психологические проблемы мотивации поведения человека. М.: 1969.
- 251. М. С. Якунина, Эстетическое воспитание на уроках математики, Математика в школе.- 1982.-№5.
- 252. Encyclopaedia Britannica.
- 253. http://dic.academic.ru/dic.nsf/enc_philosophy/7761/%D0%AD
- 254. <http://compulenta.computerra.ru/chelovek/biologiya/10007977/>:
- 255. <http://esthetiks.ru/ocenka-esteticheskaya.html> .
- 256. <http://psyznaika.net/voobrazenie.html>, Воображение.
- 257. Resher N. Introduction to the Value Theory. - New Jersey, 1969
- 258. Robert C. Solomon, Oxford Companion to Philosophy. - Oxford University Press, 2005.
- 259. Tolkslovar.ru/o2569.html.

ԵՐԿՈՒ ԽՈՍՔ.....	5
-----------------	---

**Գլուխ 1. ԳԵՂԱԳԻՏԱԿԱՆ ԴԱՍՏԻԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ
ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ**

§1. Գեղագիտական դաստիարակությունը եվ մաթեմատիկական կրթությունը.....	8
1. Գեղագիտական դաստիարակությունը, նրա նպատակը, խնդիրները և գործառույթները	8
2. Մաթեմատիկական կրթությունը և գեղագիտական դաստիարակության հիմնախնդիրը	10
3. Համակարգային մոտեցում մաթեմատիկայի ուսուցման միջոցով գեղագիտական դաստիարակության խնդրի լուծմանը.....	14
§2. Սուբյեկտիվ հարաբերություն	19
1. Սուբյեկտիվություն և օբյեկտիվություն	19
2. Երկկողմ սուբյեկտիվ հարաբերություն.....	20
3. Եռակողմ սուբյեկտիվ հարաբերություն.....	21
§3. Մաթեմատիկական գեղեցիկի սուբյեկտիվ տեսանկյունը	26
1. Մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ և սուբյեկտիվ հատկանիշները.....	26
2. Գիտական գեղեցիկի մոտիվային հատկանիշները.....	31
3. Գիտական գեղեցիկի ճանաչողական հատկանիշները.....	37
4. Գիտական գեղեցիկի հոգեկան հատկանիշները	39
§4. Մաթեմատիկական գեղեցիկի օբյեկտիվ տեսանկյունը	41
1. Կազմավորող հատկանիշները.....	41
2. Գիտական գեղեցիկի միավորող հատկանիշները.....	53
3. Գիտական գեղեցիկի տրամաբանական հատկանիշները.....	59
§5. Գեղեցիկի արտաքին և ներքին դրսևփորումները մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում	68

1. Գիտական գեղեցիկի արտաքին դրսևորումները մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում	68
2. Գիտական գեղեցիկի ներքին դրսևորումները մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում	70
3. Գիտական գեղեցիկի արտաքին և ներքին գեղագիտությունների կապը	72
§6. Գեղագիտական հիմնական արժեքները և մաթեմատիկական կրթությունը	77
1. Գեղագիտական արժեքներ	77
2. Գեղեցիկը, տգեղը և մաթեմատիկական կրթությունը	79
3. Վեհը, ստորը և մաթեմատիկական կրթությունը	82
4. Կատակերգականը, ողբերգականը և մաթեմատիկական Կրթությունը	91

Գլուխ 2. ԳԵՂԵՑԻԿԸ ԱՆՁԻ ՀՈԳԵԿԱՆՈՒՄ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ

§1. Գեղագիտական պահանջմունքը և մաթեմատիկական կրթությունը	104
1. Գեղագիտական պահանջմունքը և մաթեմատիկական	104
2. Գեղագիտական պահանջմունքի աղբյուրները և Մաթեմատիկական	105
3. Խաղը և մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացը	109
4. Գեղագիտական պահանջմունքի ձևավորումը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում	111
§2. Գեղագիտական հույզերը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում	115
1. Գեղեցիկի և գեղագիտական դաստիարակության հուզագրացմունքային բաղադրիչը	115
2. Գեղագիտական հույզերը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում	116

3. Սպասումի և կանխատեսման հույզեր	119
4. Բավարարություն և ուրախություն	122
5. Ֆրուստրացիոն հույզեր	127
6. Համագործակցային հույզեր.....	129
7. Ինտելեկտուալ հույզեր	129
8. Գեղեցիկը հուզական վիճակներում և մաթեմատիկական կրթությունը.....	136
§3. Գեղագիտականը զգացմունքները և մաթեմատիկական կրթությունը.....	142
1. Գեղագիտական զգացմունք	142
2. Գեղեցիկի նկատմամբ համակրանքի զգացմունքը	143
3. Սիրո գեղագիտական զգացմունքը.....	146
§4. Ուշադրության գեղեցկությունը և մաթեմատիկական կրթությունը.....	150
1. Ուշադրության գեղեցկությունը և մաթեմատիկական գեղեցիկի հատկանիշները	150
2. Ուշադրության տեսակները	160
§5. Հիշողության գեղեցկությունը և մաթեմատիկական Կրթությունը	164
1. Հիշողության գործընթացը.....	164
2. Հիշողության տեսակները.....	169
§6. Կամքի գեղեցկությունը և մաթեմատիկական կրթությունը.....	174
1. Կամք, կամային հիմնական որակները և դրանց ձևավորման խնդիրը.....	174
2. Նպատակասլացություն.....	176
3. Վճռականություն	179
4. Համառություն.....	182
5. Տոկոսություն	185
6. Համարձակություն.....	187
7. Ինքնուրունություն.....	190
8. Ինքնատիրապետում	193

§7. Երեվակայության գեղեցկությունը և մաթեմատիկական կրթությունը.....	196
1. Երևակայություն, նրա դերը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում.....	196
2. Երևակայության տեսակները	198
3. Երևակայության հատկությունները	201
4. Երևակայության զարգացումը.....	203

Գլուխ 3. ԳԵՂԱԳԻՏԱԿԱՆ ԴԱՍՏԻԱՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԿԱՏԵԳՈՐԻԱՆԵՐԸ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ

§1. Գեղագիտական հարաբերությունը մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում.....	209
1. Երկկողմ գեղագիտական հարաբերություն.....	209
2. Եռակողմ գեղագիտական հարաբերություն.....	213
3. Գեղագիտական հարաբերությունները մաթեմատիկայի ուսուցման գործընթացում.....	214
§2. Գեղագիտական ճանաչումը և մաթեմատիկական կրթությունը.....	218
1. Գեղագիտական ընկալումը և մաթեմատիկական կրթությունը.....	218
2. Գեղագիտական զարգացումը և մաթեմատիկական կրթությունը.....	222
3. Գեղագիտական ճշմարիտը և մաթեմատիկական կրթությունը.....	232
§3. Գեղագիտական գնահատումը և մաթեմատիկական կրթությունը.....	244
1. Գեղագիտական ճաշակը.....	244
2. Գեղագիտական ճաշակը և մաթեմատիկական կրթությունը.....	248

3. Գեղագիտական իդեալը և մաթեմատիկական կրթությունը.....	253
4. Գեղագիտական գնահատումը և մաթեմատիկական կրթությունը.....	262

Գլուխ 4. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԿՐԹՈՒԹՅԱՆ ՃԱՐՏԱՐԱՊԵՏԱԿԱՆ ՈՃԵՐԻ ԳԵՂԱԳԻՏԱԿԱՆ ԳՐԱՎՅՈՒԹՅՈՒՆԸ

§1. Իմացության մեթոդները և մաթեմատիկական կրթության գեղեցկությունը.....	268
1. Իմացության էմպիրիկ մեթոդները	268
2. Վերլուծությունը և համադրությունը	274
3. Ընդհանրացումը և մասնավորեցումը	280
4. Վերացարկումը և կոնկրետացումը	282
5. Համեմատությունը	291
6. Անալոգիան	298
7. Իմացության մեթոդների զուգակցումը	304
§2. Մաթեմատիկայի ուսուցման մեթոդների գեղագիտական գրավչությունը	308
1. Աքսիոմատիկ մեթոդը	308
2. Պրոբլեմային ուսուցում	316
3. Մաթեմատիկայի ուսուցման էվրիստիկական մեթոդը.....	320
4. Մաթեմատիկական մոդելավորումը.....	324
5. Ուսուցման այլ մեթոդներ	329
§3. Ինդուկցիայի և դեդուկցիայի գեղագիտական գրավչությունը	330
1. Ինդուկցիան	330
2. Դեդուկցիան	333
3. Մաթեմատիկական ինդուկցիան	335

**Գլուխ 5. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ՈՒՍՈՒՑՄԱՆ ԳՈՐԾԸՆԹԱՑԻ
ԳԵՂԱԳԻՏԱԿԱՆ ԳՐԱՎՃՈՒԹՅՈՒՆԸ**

§1. Մաթեմատիկական կրթության հիմնախնդիրները և գեղեցիկի ձեվավորումը.....	342
1. Մաթեմատիկայի գիտական և հանրակրթական բնագավառների փոխհարաբերությունը և գեղեցիկի ձևավորման հիմնախնդիրը	342
2. Մաթեմատիկական կրթության նպատակները և Գեղագիտական արժեքների ձևավորումը	347
3. Մաթեմատիկական կրթության գործառույթները և գեղեցիկի ձևավորման խնդիրը	349
4. Մաթեմատիկական կրթությունը հումանիստական հարացույցի պայմաններում	352
5. Մաթեմատիկական կրթության արդիականացումը և գեղեցիկի ձևավորման խնդիրը	355
§2. Գեղեցիկի ձեվավորումը մաթեմատիկական հասկացությունների ուսուցման գործընթացում	363
1. Մաթեմատիկական հասկացությունների գեղագիտական գրավչության հիմնախնդիրը	363
2. Մաթեմատիկական հասկացությունների գեղագիտական գրավչության արտահայտումը դրանց ներմուծման մոտիվացիայի միջոցով.....	364
3. Հասկացության գեղագիտական գրավչության արտահայտումը նրա սահմանման միջոցով	367
4. Հասկացության գեղագիտական գրավչության արտահայտումը նրա յուրացման միջոցով.....	371
5. Հասկացության գեղագիտական գրավչության արտահայտումը նրա կիրառման միջոցով.....	374
§3. Գեղեցիկի ձեվավորումը թեորեմների ուսուցման գործընթացում	375
1. Թեորեմների գեղագիտական գրավչության օբյեկտիվ հատկանիշները.....	375

2. Թեորեմների ուսուցման գեղագիտական գրավչության սուբյեկտիվ հատկանիշները	378
3. Թեորեմների գեղագիտական գրավչության ներքին և արտաքին դրսևորումները	381
4. Թեորեմների գեղագիտական գրավչությունը և դրանց ուսուցման մոտիվացիան	383
5. Թեորեմների գեղագիտական գրավչության արտահայտումը դրանց կիրառության միջոցով	385
§4. Գեղեցիկի ձեկավորումը ապացուցումների ուսուցման գործընթացում	387
1. Մաթեմատիկական որպես ապացուցումների արվեստ	387
2. Ի՞նչ է ապացուցումը	389
3. Ապացուցման կառույցի ճարտարապետությունը	392
4. Ապացուցման ուսուցման գեղագիտական գրավչությունը	395
§5. Գեղեցիկի ձեկավորումը խնդիրների ուսուցման գործընթացում	397
1. Մաթեմատիկական խնդրի գեղագիտական գրավչությունը	397
2. Մաթեմատիկական խնդրի գեղագիտական գրավչությունը, երբ այն դիտարկվում է որպես խաղ	399
3. Խնդրի գործառնությունները և նրա գեղագիտական գրավչությունը	401
4. Գեղագիտական գրավչությունը խնդրի տարբեր տեսակներում	404

ПРЕКРАСНОЕ И ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МАТЕМАТИКИ	411
BEAUTIFUL AND EDUCATIONAL POTENTIAL OF MATHEMATICS	415
Գրականություն	419

Հ. Ս. Միքայելյան

ԳԵՂԵՑԻԿԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՆ ԵՎ ԿՐԹՈՒԹՅՈՒՆԸ
Մաս II

ԳԵՂԵՑԻԿԸ ԵՎ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԿՐԹԱԿԱՆ
ՆԵՐՈՒԺԸ

Г. С. Микаелян

ПРЕКРАСНОЕ, МАТЕМАТИКА И ОБРАЗОВАНИЕ
Часть 2

ПРЕКРАСНОЕ И
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ МАТЕМАТИКИ

H. S. Mikaelian

BEAUTIFUL, MATHEMATICS AND EDUCATION
Part 2

BEAUTIFUL AND
EDUCATIONAL POTENTIAL OF MATHEMATICS

Կազմի նկարը՝ Ուիլյամ Բուգրո, «Անսեղություն»

ԷԴԻՏ ՊՐԻՆՏ

Երևան, Թումանյան 12
հեռ.՝ (374 10) 520 848
www.editprint.am
info@editprint.am



EDIT PRINT

12 Tumanyan str., Yerevan
Tel.: (374 10) 520 848
www.editprint.am
info@editprint.am

Համբետ Սուրենի Միքայելյան



Ծնվել է Ջավախքի Ղուշի գյուղում: Աշակերտել է Նշանավոր մաթեմատիկոս Ա. Գ. Կուրոշին: Մաթեմատիկայի պրոֆեսոր (ՌԴ Գիտության պետական կոմիտե, 1994), մանկավարժության պրոֆեսոր (ՀՀ ԲՈՀ, 2006): Հեղինակ է 7-9-րդ դասարանների հանրահաշվի դպրոցական և բարձրագույն հանրահաշվի բուհական դասագրքերի, մենագրությունների, 150-ից ավելի գիտական և գիտամեթոդական աշխատանքների, «Քրոջ Քրեդոյանը, որ կարող էր լինել Գրիգոր Գրիգորյան» և «Ո՛ր է տանում իմ հոգին» պատմվածքների ժողովածուների, «Սասնա Ծռեր» վերապատումի: Գեղանկարչական աշխատանքների պլան՝ Համբետ Միքայելյան, եղիտ Պղինտ, 2010: ՀՊՄՀ պրոֆեսոր, ամբիոնի վարիչ, դեկան, կառավարման խորհրդի նախագահ, «Մաթեմատիկական դպրոցում» ամսագրի հիմնադիր (1998) և գլխավոր խմբագիր: Գեղանկարչական աշխատանքների ցուցահանդեսներ՝ 2010- Թումանյանի տուն-թանգարան, 2012-ՀՊՄՀ, 2012-նկարիչների միության ցուցասրահ (խմբային ցուցադրում): ՀՀ Նախագահի կողից պարգևատրվել է «Անանիա Շիրակացի» մեդալով (2012):



ԷԴԻՏ ՊՐԻՆՏ
հրատարակչություն
EDIT PRINT
Publishing House